

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean KOVALEVSKY

1^{re} THÈSE. — MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DES PERTURBATIONS GÉNÉRALES.
APPLICATION AU VIII^e SATELLITE DE JUPITER.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1959 devant la Commission d'Examen.

MM. A. DANJON

Président.

M. JANET

E. SCHATZMAN

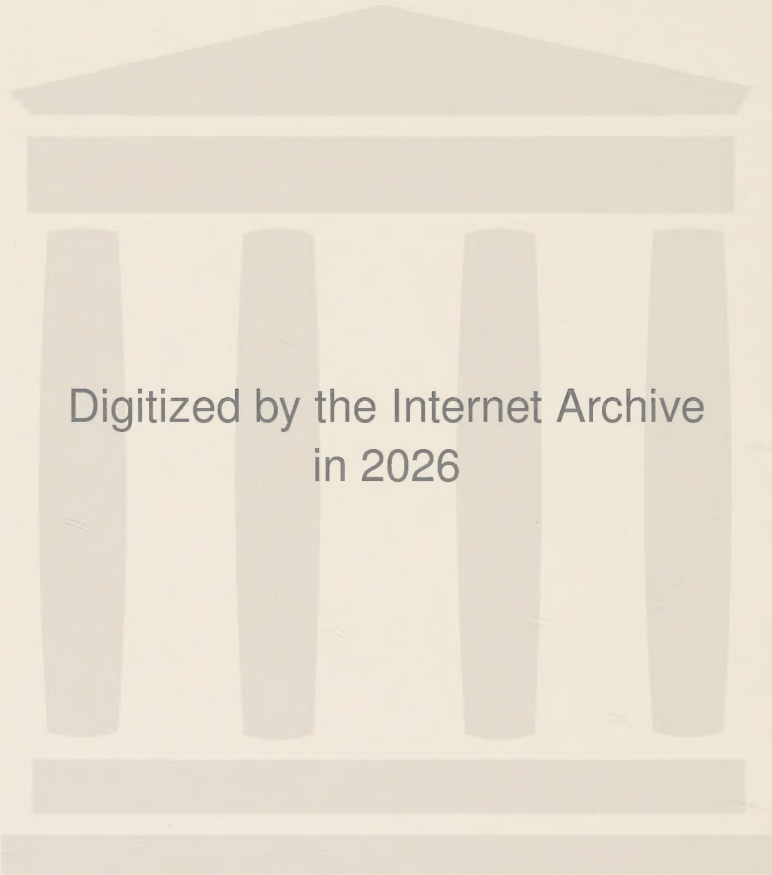
} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, N° 3369

N° D'ORDRE

4241

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean KOVALEVSKY

1^{re} THÈSE. — MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DES PERTURBATIONS GÉNÉRALES.
APPLICATION AU VIII^e SATELLITE DE JUPITER.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1959 devant la Commission d'Examen.

MM. A. DANJON

Président.

M. JANET

E. SCHATZMAN

Examineurs.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen..... J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	PONCIN.....	T	Mécanique générale.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des nombres.
De BROGLIE.....	T	Théories physiques.	QUELET.....	T	Chimie organique.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
PÉRÈS.....	T	Mécanique des fluides et applications.	CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
M. CURIE.....	T	Physique (S. P. C. N.).	CUVILLIER.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	JUNG.....	T	Pétrographie.
BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	WIEMANN.....	T	Chimie organique structurale.
GRASSÉ.....	T	Evolution des êtres organisés.	JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.
BOULIGAND.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	M. PRUVOST.....	T	Géologie.
WYART.....	T	Minéralogie.	AMIEL.....	T	Chimie générale (P. C. B.).
TEISSIER.....	T	Zoologie.	HOCART.....	T	Minéralogie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (P. C. B.).
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
MONNIER.....	T	Physiologie générale	MAY.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	CHOQUET.....	T	Calcul différentiel et intégral
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	FELDMANN.....	T	Biologie (P. C. B.).
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	GUINIER.....	T	Physique des solides.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	FORTET.....	T	Calcul des probabilités.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	MALAVARD.....	T	Aviation.
P. DRACH.....	T	Zoologie.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel.
KASTLER.....	T	Physique. (E. N. S.).	NORMANT.....	T	Chimie organique.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	DUGUÉ.....	T	Statistique mathématique.
GAUTHIERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	GELOSO.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
LUCAS.....	T	Recherches physiques.	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
MAX MORAND.....	T	Enseignement de Physique.	KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
SOLEILLET.....	T	Physique.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	DESTRIAU.....	T	Physique (M. P. C.).
DANJON.....	T	Astronomie.	M ^{lle} Le BRETON.....	T	Physiologie générale.
LAPORTE.....	T	Physique générale et Radioactivité.	SALEM.....	T	Mathématiques générales.
JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LELONG.....	T	Mathématiques générales.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	DEVILLERS.....		Anatomie et Histologie comparées.
QUENEY.....	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.	EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.	FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
EICHHORN.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	GLANCEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
De CUGNAC.....	T	Biologie végétale. (S. P. C. N.).	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie physique.	PISOT.....	T	Calcul des probabilités.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.	ROCH (E.).....	T	Géologie.
L'HÉRITIER.....	T	Génétique.	SCHATZMAN.....	T	Astrophysique.
GRIVET.....	T	Radioélectricité.	TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.
			ZEMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
			LENNUER.....		Physique (M. G. P.).
			RIZET.....		Génétique.
			ROUTHIER.....		Géologie appliquée.
			M ^{me} TONNELAT.....	T	Théories physiques.
			DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).

SOUCHAY.....	T	Chimie générale.	CAMUS.....	Biologie végétale (P. C. B.).
AIGRAIN.....	T	Électrotechnique.	CASTAING.....	Physique générale.
BRUSSET.....		Chimie minérale.	CURIEN.....	Minéralogie et Cristallogra-
M. LÉVY.....		Physique théorique.		phie.
M ^{me} CHAIX.....		Chimie biologique.	MOYSE.....	Physiologie végétale.
M ^{me} HUREL-PY..		Biologie végétale (P. C. B.).	NOIROT.....	Évolution des êtres organisés.
PIAUX.....		Chimie (P. C. B.).	PANNETIER.....	Chimie (S. P. C. N.).
BRUN.....		Mécanique expérimentale des	POSSOMPES.....	Biologie animale (P. C. B.).
		fluides.	PULLMANN.....	Chimie théorique.
LIEDERER.....	T	Chimie des substances orga-	TEILLAC.....	Physique nucléaire et Radio-
		niques naturelles.		activité.
M ^{me} DUBREIL....	T	Mathématiques.	TONNELAT.....	Biologie physicochimique.
M ^{me} LELONG....	T	Mathématiques (E. N. S.).	VILLE.....	Économétrie.
BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	WILLEMART.....	Chimie (P. C. B.).
COTTE.....	T	Physique (M. P. C.).	DODÉ.....	T Chimie.
J. E. DUBOIS....	T	Chimie (S. P. C. N.).	FREYMANN.....	T Physique (S. P. C. N.).
LAMOTTE.....		Zoologie (E. N. S.).	GUINOCHE.....	T Biologie végétale (Orsay).
MICHEL ANDRÉ..	T	Chimie (S. P. C. N.).	ROLLET.....	T Chimie (P. C. B.).
OLMER.....	T	Énergétique générale.	M ^{lle} JOSIEN.....	T Chimie (P. C. B.).
ROUAULT.....	T	Physique générale.	CHEVALLEY.....	T Géométrie algébrique et théo-
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.		rie des groupes.
BARCHEWITZ....		Chimie physique.	ARNOULT.....	T Physique (Orsay).
BROSSEL.....		Physique atomique.	CHAPELLE.....	T Physique (P. C. B.).
BUSER.....		Biologie animale (P. C. B.).	DELANGE.....	T Mathématiques (Orsay).
			DENY.....	T Mathématiques (Orsay).
			GERMAIN.....	T Mécanique théorique des fluides.
			LUCAS G.....	T Géologie.

Secrétaire général..... CH. MONIER.

A Monsieur ANDRÉ DANJON

Membre de l'Institut
Membre du Bureau des Longitudes
Directeur de l'Observatoire de Paris

ET

A Monsieur DIRK BROUWER

Directeur de l'Observatoire de l'Université de Yale

Témoignage de respectueuse gratitude

PREMIÈRE THÈSE.

MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DE PERTURBATIONS GÉNÉRALES. APPLICATION AU VIII^e SATELLITE DE JUPITER

Par M. Jean KOVALEVSKY.

(Observatoire de Paris).

SOMMAIRE. — Exposé d'une nouvelle méthode permettant d'obtenir une théorie analytique numérique du type lunaire : les résultats d'une intégration numérique des équations sont développés en série de Fourier par une analyse harmonique. Variante de la méthode lorsqu'il y a une quasi-commensurabilité entre les arguments. Application au VIII^e satellite de Jupiter. On donne une orbite provisoire représentant les observations à 190" près. On donne aussi le résultat d'une itération dans la résolution des équations de Lagrange. Comparaison des séries obtenues avec l'orbite provisoire. Convergence de ce processus.

ABSTRACT. — A new method is described, permitting to obtain a numerical analytical theory of a lunar type : the results of a numerical integration of the equations are expanded in Fourier series by means of a harmonic analysis. An alternate approach is given for the case in which the arguments are quasi-commensurable. An application is done for the VIIIth satellite of Jupiter. A provisional orbit, representing the observations with an error of 190" is presented. The results of an iteration in solving the Lagrange equations are also given, and are compared to the provisional orbit. The convergence of this procedure is shown.

ZUSAMMENFASSUNG. — Darlegung einer neuen Methode welche gestattet eine numerische analytische Theorie vom Mondtypus zu erhalten : die Ergebnisse einer numerischen Integration der Gleichungen werden, mittels einer harmonischen Analysis in ein Fouriersche Reihe entwickelt. Variante der Methode wenn eine quasi-kommensurabilität

zwischen den Argumenten besteht. Anwendung auf den VIII. Jupitermond. Eine provisorische Bahn wird gegeben, welche die Beobachtungen bis zu $190''$ darstellt. Das Resultat einer Iteration in der Auflösung der Lagrangeschen Gleichungen werden ebenfalls gegeben. Vergleichung der erhaltenen Reihen mit der provisorischen Bahn. Konvergenz dieses Verfahrens.

Резюме. — Изложение нового способа создания численно-аналитической теории лунного типа : результаты численного интегрирования уравнений разлагаются в ряды Фурье методом гармонического анализа. Вариант способа, когда аргументы почти соизмеримы. Применение этого способа к изучению движения VIII-го спутника Юпитера. Дается предварительная орбита, представляющая наблюдения с точностью до $190''$. Дается результат одной итерации при решении уравнений Лагранжа. Сравнение новых рядов с предварительной орбитой. Сходимость этого процесса.

INTRODUCTION

Le récent développement des machines à calculer électroniques à très grande vitesse a donné aux astronomes un outil très puissant pour résoudre le problème du mouvement des corps du Système solaire. Plusieurs techniques ont été employées.

La première tendance a été d'appliquer les méthodes d'intégration numérique, particulièrement adaptées au calcul automatique, au mouvement des planètes ou des satellites. Le travail le plus important de cette catégorie a été l'intégration du mouvement des planètes extérieures entre 1 653 et 2 060 par Eckert, Brouwer et Clemence [1]. Cependant, l'intégration numérique, valable seulement dans l'intervalle de temps pour lequel elle a été effectuée, n'est pas en elle-même une réponse satisfaisante au problème du mouvement. Le but que nous devons nous fixer est d'obtenir des séries de Fourier, satisfaisant aux équations différentielles et représentant les positions du corps étudié dans un intervalle de temps très grand.

C'est pourquoi les machines électroniques ont également été utilisées dans ce sens. On a ainsi essayé d'améliorer les théories existantes par substitution dans les équations des résultats déjà connus, et la résolution de ces équations par une méthode d'itération. Tel est le cas pour la théorie de la Lune de Brown, maintenant perfectionnée par Eckert [2]. De nombreux autres travaux ont été effectués ou sont en cours, utilisant

des machines électroniques pour résoudre des problèmes de Mécanique céleste par des méthodes anciennes peu ou pas modifiées.

Cependant, à ma connaissance, aucune méthode réellement nouvelle, inspirée par ces nouveaux moyens de calcul, n'a été essayée jusqu'à présent. De telles méthodes, proposées oralement par quelques spécialistes, seraient pourtant l'aboutissement normal d'une évolution commencée il y a 100 ans.

A l'origine, on avait espéré pouvoir donner des expressions littérales aux coefficients des séries de Fourier. Il aurait alors suffi de remplacer les paramètres par leur valeur numérique pour avoir la représentation du mouvement d'un système donné. Incidemment, cette approche du problème garde tout son intérêt théorique et l'on peut prévoir, dans un proche avenir, de nouveaux progrès, grâce aux calculateurs électroniques à grande capacité. Le travail le plus complet dans cette voie a été la théorie de la Lune de Delaunay [3]. Les développements, pourtant considérables, restaient insuffisants pour représenter les positions avec la précision, toujours croissante, des observations. Aussi les diverses théories du xix^e et du xx^e siècles, prenaient-elles un caractère plus numérique, où de plus en plus de paramètres se voyaient attribuer des valeurs numériques à un stade de moins en moins avancé de la solution.

L'exemple de la théorie de la Lune illustre bien la tendance imprimée à la Mécanique céleste appliquée par le développement du calcul électronique. La théorie de Brown est le fruit de 50 années de travaux de Hill et de Brown. Le résultat numérique de cet immense labeur a été le point de départ, pour Eckert, d'un calcul par une méthode d'itérations pour résoudre les équations du mouvement. Ce travail d'Eckert aurait donné les mêmes résultats, quitte à faire une ou deux itérations supplémentaires, même s'il était parti d'une solution moins bonne que celle de Brown. Entreprendre un travail de l'envergure de celui de Brown avec ses méthodes n'aurait plus sa raison d'être aujourd'hui.

Le problème qui se pose est donc le suivant : peut-on, par des méthodes strictement numériques, justiciables au maximum du calcul automatique, obtenir des séries représentant le mouvement de façon suffisante pour servir de point de départ à une résolution des équations par itérations ?

C'est une première réponse affirmative à cette question que je m'efforce de donner dans ce travail, en appliquant à un cas concret une méthode utilisant une analyse harmonique. La solution que je propose consiste à déduire d'un calcul de perturbations spéciales, une théorie générale présentée sous la forme classique de séries de Fourier. Cette idée n'est pas nouvelle; en particulier, E. Stiefel [4] a déjà essayé de faire une liaison analogue pour les perturbations du demi-grand axe.

Le choix du VIII^e satellite de Jupiter comme exemple illustrant la méthode est justifié par le fait que les théories semi-analytiques qui en

ont été proposées ont donné des résultats peu satisfaisants [5]. Cet échec est dû au fait que la valeur des paramètres du mouvement est telle que les séries qu'on doit manier sont trop importantes pour un calcul analytique manuel. Pour empêcher les calculs de devenir inextricables, les auteurs ont été obligés de faire des hypothèses simplificatrices qui ne sont pas toujours justifiées. Brown, auteur de la meilleure de ces théories écrit au sujet de ce satellite qu'il représente le « plus difficile des problèmes de Mécanique céleste qu'il ait jamais rencontrés » [6].

Aussi peut-on penser que si la méthode que j'expose mène à un résultat plus satisfaisant que les théories classiques sur ce cas particulièrement complexe, elle s'appliquera d'autant mieux aux autres cas. De plus, l'état d'esprit avec lequel j'aborde ici le problème est certes très différent de l'état d'esprit classique, mais je pense que ce changement est justifié *a posteriori* par les résultats.

Une autre raison du choix de ce satellite est l'intérêt particulier que présenterait sa théorie. En effet, le rapport des attractions du Soleil et de Jupiter, de l'ordre de $1/40$ lorsque le satellite est à une distance de Jupiter égale au demi-grand axe, peut atteindre $1/7$ dans certains cas extrêmes. Les perturbations qui en résultent sont plusieurs dizaines de fois supérieures à celles subies par les petites planètes les plus proches de Jupiter. Les 50 années d'observations devraient permettre de déterminer la masse de Jupiter avec une précision relative voisine de 10^{-5} . Le travail présent sera ainsi en même temps une préparation à une future détermination de la masse du système jovien.

Le premier chapitre contient une exposition de la méthode. On y propose une possible marche à suivre pour arriver à une théorie générale en partant d'une intégration numérique du mouvement, à condition que les arguments principaux intervenant dans cette théorie aient une période au plus comparable à l'intervalle d'intégration.

Dans le second chapitre, j'applique ces règles au cas du VIII^e satellite de Jupiter. Ceci constitue une illustration des règles précédentes qui sont ainsi précisées. Nous mettons en évidence un mouvement moyen du périjove très faible, si bien que la condition ci-dessus n'est pas réalisée.

Le troisième chapitre a pour objet l'exposition d'une adaptation de la méthode générale du début, qui peut être appliquée lorsqu'une des périodes importantes de la théorie est grande par rapport à l'intervalle d'intégration.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application de cette modification au cas du VIII^e satellite de Jupiter. Le calcul est mené jusqu'au bout et l'on donne les séries représentant les coordonnées rectangulaires du satellite.

Enfin, le cinquième chapitre a pour objet l'étude des séries précédentes et de leur comparaison, soit avec l'intégration et les observations, soit avec les séries obtenues en intégrant les équations de Lagrange où l'on

avait substitué les résultats du quatrième chapitre. Cette étude nous permettra de conclure que les séries obtenues par la méthode proposée sont meilleures que toutes celles qui ont été obtenues jusqu'à maintenant par les méthodes classiques pour ce satellite.

CHAPITRE I.

THÉORIE D'UN SATELLITE PAR L'ANALYSE HARMONIQUE.

1. Emploi de l'analyse harmonique en Mécanique céleste. — Divers auteurs de théories semi-analytiques ont employé l'analyse harmonique comme méthode auxiliaire de calcul, permettant de développer en série de Fourier une fonction analytiquement connue. Déjà Hill [7] avait proposé de résoudre le problème des termes séculaires du problème de Jupiter et de Saturne par un procédé qui revient à une analyse harmonique. L'application la plus fréquente est le développement de la fonction perturbatrice, tel qu'il a été exposé, par exemple, par Brown et Shook [8]. Cette méthode a été suivie en particulier par Clemence dans sa théorie de Mars [9]. Brown et Brouwer ont aussi effectué des analyses harmoniques pour développer en série de Fourier certaines fonctions qui se présentaient dans la théorie du VIII^e satellite de Jupiter [6], [10].

Dans tous les cas, les auteurs calculent des valeurs particulières de la fonction à partir de combinaisons arbitraires des variables angulaires, considérées comme indépendantes. Dans le mouvement réel, il n'y a pas de valeur du temps pour laquelle les variables angulaires prennent lesdites valeurs. Il s'ensuit qu'on peut ainsi calculer autant de valeurs particulières de la fonction qu'on veut et ainsi trouver un nombre arbitraire de termes du développement par des calculs très simples.

2. Analyse harmonique d'une fonction tabulée dans un intervalle. — Si nous désirons construire une théorie entièrement numérique, nous ne devons plus espérer avoir une fonction définie analytiquement, mais simplement tabulée pour un intervalle de temps déterminé. Par suite, les divers arguments angulaires ne pourront plus prendre n'importe quelle combinaison de valeurs. Les méthodes d'analyse harmonique analogues à celles que nous venons de citer sont inopérantes.

Soit $f(t)$ une certaine fonction du temps, tabulée dans un intervalle de temps $t_0 - t_1$ et dont nous savons qu'elle peut être représentée par une série de Fourier de la forme

$$(1) \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{ijk} \cos(i x + j y + k z),$$

où

$$x = n_x t + x_0, \quad y = n_y t + y_0, \quad z = n_z t + z_0$$

sont des fonctions linéaires du temps. Le nombre d'arguments peut être différent de trois. On peut aussi avoir des séries en sinus au lieu du cosinus, ou encore mixtes. On sait, depuis Poincaré [11], que les séries de Fourier de ce type qui se rencontrent en Mécanique céleste ne sont pas convergentes. Cependant, les quantités que ces séries représentent peuvent être approchées aussi bien qu'on veut dans un intervalle de temps fini par une somme finie comprenant les termes pour lesquels i , j et k sont des nombres entiers petits et quelques autres termes de longue période. Supposons que nous puissions prévoir quels sont ces termes principaux (au nombre de N). On aura alors à déterminer les N coefficients A_{ijk} de

$$(2) \quad f(t) = \sum_{i,j,k} A_{ijk} \cos(ix + jy + kz).$$

Donnons à t , P valeurs dans l'intervalle $t_0 - t_1$. On en déduira P valeurs de $f(t_p)$ par interpolation de la table, et l'on pourra calculer les N inconnues A_{ijk} en résolvant le système (3) de P équations à N inconnues par la méthode des moindres carrés :

$$(3) \quad \sum_{i,j,k} A_{ijk} a_p^{ijk} = f(t_p),$$

où a_p^{ijk} est la valeur prise par $\cos(ix + jy + kz)$ si $t = t_p$.

3. Condition nécessaire de possibilité de l'analyse harmonique.

— Le système linéaire ainsi obtenu admettra-t-il toujours une solution ? Gauss a déjà montré [12] que tout système d'équations normales peut être résolu si le problème lui-même est déterminé. Dans notre cas, si x , y et z sont incommensurables, les fonctions $\cos(ix + jy + kz)$ sont linéairement indépendantes pour toutes combinaisons différentes de i , j et k , et le déterminant principal du système ne s'annulera pas. S'il y a une relation $i_0 x + j_0 y + k_0 z = 0$, on a alors

$$(4) \quad \cos(ix + jy + kz) = \cos[(i + \lambda i_0)x + (j + \lambda j_0)y + (k + \lambda k_0)z].$$

Si deux de ces combinaisons étaient prises pour inconnues, il y aurait indétermination. Appelons α_1 et α_2 ces deux arguments, les colonnes correspondantes du déterminant auront pour terme général

$$\sum_p^{P_1} (\cos \alpha_1)_p a_p^{ijk} \quad \text{et} \quad \sum_p^{P_2} (\cos \alpha_2)_p a_p^{ijk};$$

comme $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$, elles sont identiques et le déterminant est nul.

Supposons maintenant que, sans être identiques, $(\cos \alpha_1)_p$ et $(\cos \alpha_2)_p$ sont très voisins pour toutes les observations. Il en serait ainsi si ces arguments étaient très voisins pour t_0 et si l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ à l'intérieur duquel on a pris ces valeurs particulières des cosinus était petit par rapport à la période de $\alpha_1 - \alpha_2$. Alors les deux colonnes seraient très voisines. Comme on ne change pas la valeur du déterminant en retranchant deux colonnes terme à terme, on voit qu'il est équivalent à un déterminant dont une colonne serait $\sum_p^{(p)} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)_p \alpha_p^{ijk}$ et qu'il serait de l'ordre de grandeur de $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)_p$, donc très petit. Le problème admet alors une indétermination de calcul.

Dans le cas des séries mixtes, on peut généraliser ce résultat. Nous cherchons une représentation de la forme

$$f(t) = \sum_{i,j,k} [A_{ijk} \cos(ix + jy + kz) + B_{ijk} \sin(ix + jy + kz)].$$

Les quatre colonnes du déterminant correspondant aux deux arguments α_1 et α_2 admettent pour terme général

$$\sum_p^{(p)} (\cos \alpha_1)_p \alpha_p^{ijk}; \quad \sum_p^{(p)} (\sin \alpha_1)_p \alpha_p^{ijk}; \quad \sum_p^{(p)} (\cos \alpha_2)_p \alpha_p^{ijk}; \quad \sum_p^{(p)} (\sin \alpha_2)_p \alpha_p^{ijk}.$$

Supposons qu'on ait $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, où φ est un angle constant. La 3^e colonne a pour terme général

$$\sum_p^{(p)} (\cos \alpha_1)_p \alpha_p^{ijk} \cos \varphi - \sum_p^{(p)} (\sin \alpha_1)_p \alpha_p^{ijk} \sin \varphi$$

et est une combinaison linéaire des deux premières. Le déterminant est nul.

De même que précédemment, les deux colonnes resteraient très voisines si $\alpha_2 = \alpha_1 + \varepsilon + \varphi$, où ε est un terme croissant lentement avec t donnant une période grande par rapport à $t_1 - t_0$, et le déterminant serait très petit.

Par conséquent, une condition nécessaire de possibilité d'une telle analyse harmonique est que l'intervalle $t_1 - t_0$ ne soit pas petit par rapport aux périodes des termes conservés et à toute période obtenue en faisant la différence de deux quelconques des arguments conservés. Nous avons, dans la suite, pris pour règle que ces périodes soient inférieures à $t_1 - t_0$.

4. **Choix des fonctions à analyser.** — Ainsi que l'a montré Tisserand [13], le mouvement d'un satellite perturbé par le Soleil peut être représenté, à une fonction linéaire près, par des séries de Fourier dépendant de quatre paramètres angulaires indépendants. Nous avons choisi

pour ce travail les quatre arguments utilisés par Delaunay dans sa théorie de la Lune [3]. Il va sans dire que tout autre choix serait valable. Utilisons les notations de Delaunay; ces arguments sont :

- l , argument de l'anomalie moyenne du satellite;
- l' , argument de l'anomalie moyenne du Soleil;
- D , distance moyenne satellite-Soleil;
- F , distance moyenne satellite-nœud ascendant.

Si $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ sont les longitudes moyennes des périhélie du satellite et du Soleil, et $\bar{\Omega}$ la longitude moyenne du nœud, on a en particulier les relations

$$(6) \quad \begin{cases} D = l + \bar{\omega} - l' - \bar{\omega}', \\ F = l + \bar{\omega} - \bar{\Omega}. \end{cases}$$

L'analyse doit se faire sur des fonctions représentant le mouvement et non plus sur des fonctions intermédiaires qu'il faudrait encore traiter algébriquement avant de les utiliser. Nous avons écarté les coordonnées rectangulaires (ou cylindriques comme chez Delaunay), et choisi les éléments osculateurs du mouvement du satellite :

- a , demi-grand axe;
- e , excentricité;
- i , inclinaison sur le plan du mouvement du Soleil;
- Ω , longitude du nœud ascendant;
- ω , argument de la latitude du périhélie : $\omega = \bar{\omega} - \Omega$;
- M , anomalie moyenne.

Les raisons de ce choix sont :

1° Les arguments intervenant dans x et y contiennent des multiples pairs de F , tandis que ceux qui interviennent dans z contiennent des multiples impairs. Il faut donc faire deux choix indépendants d'arguments à utiliser. Par contre, tous les éléments osculateurs ne font intervenir que les multiples pairs de F .

2° Pour résoudre les équations du mouvement par itérations, nous serons conduits à des intégrations doubles, à éviter au maximum à cause des petits diviseurs. Parmi les éléments, seul M a cet inconvénient.

3° Une évaluation approchée des arguments fondamentaux du problème, nécessite de toute façon le calcul de Ω , ω et M dont les parties linéaires sont $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega} - \Omega$ et l . En effet, ce sont ces dernières qui permettront, à l'aide des équations (6), de calculer D et F .

5. **Principe de l'analyse harmonique.** — Supposons que l'intervalle de temps choisi soit tel que les conditions du paragraphe 3 soient

satisfaites. L'exposé sera fait pour une fonction en cosinus, comme par exemple a , e ou i ,

$$(7) \quad F(t) = \sum_{h,i,j,k} A_{hijk} \cos(hD + iI' + jF + kI).$$

On pourrait appliquer la méthode des moindres carrés sur N termes principaux, mais les théories existantes montrent que, pour la plupart des satellites, il faudrait donner à N des valeurs supérieures à 100 et pouvant atteindre 300 pour des satellites comme le VIII^e satellite de Jupiter. Or, on peut éviter assez aisément la lourdeur d'un tel calcul et les difficultés propres à l'inversion d'une matrice, même régulière, d'ordre supérieur à 100.

On peut écrire

$$(8) \quad F(t) = \sum_{h,i,j} \sum_k (A_{hijk} \cos kI) \cos(hD + iI' + jF) \\ - \sum_{h,i,j} \left(\sum_k A_{hijk} \sin kI \right) \sin(hD + iI' + jF).$$

Définissons la nouvelle fonction à deux variables, $\Phi(\tau, t)$ ayant la même expression analytique que $F(t)$ donnée par (7), mais où I serait non plus une fonction linéaire de t , mais la même fonction linéaire d'une variable indépendante $\tau : I = n\tau + c_0$.

On a donc

$$(9) \quad F(t) = \Phi(t, t).$$

Donnons à I une valeur fixe I_0 . Nous pourrions le faire en donnant à τ des valeurs successives $t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_j}$ et posons

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{hij}(I_0) = \sum_k A_{hijk} \cos kI_0, \\ S_{hij}(I_0) = \sum_k A_{hijk} \sin kI_0. \end{array} \right.$$

Pour toutes les valeurs entières de λ , $\Phi\left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_j}, t\right)$ reprend la même valeur suivante, déduite de la formule (8), soit

$$(11) \quad \Phi(t_0, t) = \Phi_{I_0}(t) = \sum_{h,i,j} C_{hij}(I_0) \cos(hD + iI' + jF) \\ - \sum_{h,i,j} S_{hij}(I_0) \sin(hD + iI' + jF).$$

Nous avons ainsi défini une nouvelle fonction $\Phi_{I_0}(t)$ ne dépendant de t

que par les trois arguments D , l' et F , développable en série de Fourier mixte. Or, d'après (9), on peut écrire

$$\Phi_{l_0}\left(t + \frac{2\lambda\pi}{n_l}\right) = \Phi\left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l}, t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l}\right) = F\left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l}\right).$$

Nous avons donc autant de valeurs de cette nouvelle fonction Φ_{l_0} que λ peut prendre de valeurs entières différentes dans l'intervalle de tabulation de la fonction F . Soit P ce nombre, nous allons pouvoir appliquer P fois l'équation (11).

De même, nous aurons

$$(12) \quad \begin{aligned} \Phi_{-l_0}(t) = & \sum_{h,i,j} C_{hij}(l_0) \cos(hD + il' + jF) \\ & + \sum_{h,i,j} S_{hij}(l_0) \sin(hD + il' + jF) \end{aligned}$$

dont on aura P nouvelles valeurs $F\left(-t_0 - \frac{2\lambda\pi}{n_l}\right)$.

Si N est le nombre de combinaisons h , i et j retenues, on aura ainsi au total $2P$ équations à $2N$ inconnues qu'on peut résoudre par les moindres carrés.

Faisons maintenant le même calcul pour une série de Q valeurs différentes de l_0 . Nous obtiendrons ainsi Q valeurs des coefficients $C_{hij}(l)$ et $S_{hij}(l)$. On pourra donc calculer les A_{hijk} en résolvant les $2Q$ équations (10) par les moindres carrés.

Le gain ainsi réalisé est important. L'étude des développements de Delaunay montre que les termes principaux sont groupés en séquences de quatre à huit termes ayant des valeurs entières successives de k . Le nombre de termes principaux à trouver dans la première phase est donc divisé à peu près par 6. Nous pouvons prendre $Q = 13$ (l_0 de 15 en 15°) et chercher dans la deuxième partie les termes pour k compris entre -8 et $+8$.

Nous remplaçons ainsi une inversion de matrice d'ordre $6N$ par Q inversions de matrice d'ordre N . La deuxième phase ne fait intervenir qu'une seule matrice pour tous les coefficients, matrice qui se simplifie beaucoup si les Q valeurs de l_0 sont en progression arithmétique.

Remarquons, de plus, que si nous avons plusieurs fonctions à analyser qui ont les mêmes termes principaux, les calculs faits pour une première fonction restent valables en changeant seulement les seconds membres. Il n'y aura donc pas de nouvelle inversion de matrice à effectuer. Si c'est une fonction en sinus, seule la deuxième phase fera intervenir une matrice différente.

6. Préparation des données pour l'analyse. — L'étude du para-

graphe précédent suppose qu'on connaisse d'avance la valeur exacte des arguments D , F , l et l' et qu'on sache quels sont les termes principaux des développements. Or, lorsqu'on commence l'étude d'un corps, ces renseignements sont mal connus. Nous proposons ici une marche à suivre pour les déterminer.

a. Intégration numérique. — Au départ il faut obtenir une éphéméride du mouvement dans l'intervalle de temps $t_1 - t_0$. On le fera par une intégration numérique du mouvement. On aura soin de ne pas introduire dans l'intégration de termes périodiques autres que ceux que nous allons analyser. Ainsi il faudra éviter d'introduire tout terme provenant des perturbations autres que celles dues au Soleil et à la planète. Il faudra donc prendre pour orbite de la planète une orbite elliptique, supprimant ainsi toute perturbation planétaire directe ou indirecte.

Nous ne décrivons pas ces méthodes d'intégration numérique, toutes classiques, qu'on choisisse la méthode de Cowell ou de Encke [14]. L'orbite devra être rattachée aux observations avec une précision comparable aux perturbations planétaires négligées.

b. Calcul des éléments. — Pour chaque date, on calculera en plus des coordonnées rectangulaires, le rayon vecteur et les composantes de la vitesse, par exemple par dérivation numérique des éphémérides obtenues. Ceci nous permettra de calculer les éléments instantanés pour chacune de ces dates, à l'aide des formules classiques de détermination des orbites [15].

c. Première détermination des arguments. — Un seul des quatre arguments est parfaitement connu : c'est l' qui est une donnée de l'orbite elliptique choisie pour le mouvement du Soleil dans l'intégration numérique.

Représentons graphiquement les éléments Ω , ω et M . Analytiquement, chacune de ces quantités est représentée par une fonction linéaire du temps plus une série quadruple de Fourier en l , l' , D et F . Soient $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$ et $\bar{M}$ ces fonctions linéaires que nous allons nous efforcer de déterminer graphiquement. Si C est l'ordonnée de la courbe à étudier et D celle d'une droite, T_1 , T_0 et T_2 trois temps à peu près équidistants, nous essayons de choisir D de façon que les intégrales

$$(13) \quad \int_{T_0}^{T_1} (C - D) dt \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{T_2} (C - D) dt$$

soient nulles. Le résultat dépendra beaucoup du choix de T_0 , T_1 et T_2 , qu'il faudra placer de façon à annuler au mieux les intégrales des termes périodiques les plus apparents (*fig. 1*). Les intégrales (13) sont calculées graphiquement par décompte des carreaux. Cette méthode appliquée au

cas du VIII^e satellite de Jupiter a donné les arguments avec des erreurs de 1° pour le terme constant et de 0°,05 par an pour le coefficient de t .

On posera enfin $l = \bar{M}$ et l'on calculera F et D d'après les formules (6) sachant que ϖ' est la longitude fixe du périastre du Soleil.

d. Choix des termes principaux. — En étudiant les résultats d'une théorie préexistante du satellite, ou, à son défaut, en évaluant *grosso modo* les divers termes de la théorie de Delaunay, on peut faire une liste des termes susceptibles d'être importants dans la théorie. On fait aussi une liste de combinaisons de coefficients de l' , D et F intervenant dans ces termes.

C'est à ce stade qu'on doit voir si le nombre de ces combinaisons est inférieur au nombre de périodes de l dans l'intervalle $t_1 - t_0$ et que toutes les périodes des termes qu'on va considérer sont inférieures au même intervalle; s'il n'en est pas ainsi, il faudra prolonger l'intégration numérique jusqu'à ce que ces conditions soient vérifiées.

e. Amélioration des arguments. — L'amélioration des arguments se fera sur le principe suivant : on déterminera des variations de ces arguments de manière à minimiser la somme des carrés des résidus dans la représentation par une série de Fourier triple de quelques fonctions $\Phi_{l_0}(t)$. Ceci se fera en deux phases. En effet, l'argument l jouant un rôle particulier dans l'analyse harmonique, sa première détermination se fera séparément.

Choisissons pour $F(t)$ une fonction ayant des termes périodiques importants (il faut éviter a et i). Nous proposons r et $\frac{1}{r}$ et nous ferons le raisonnement sur le rayon vecteur r .

Prenant N combinaisons h, i, j choisies précédemment, nous allons nous efforcer de représenter les valeurs prises par $F(t) = r$ pour $l_0 = \pm 30^\circ$. Soit, d'après les notations du paragraphe 5,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{30^\circ}(t) &= \sum_{h,i,j} C_{hij}(30^\circ) \cos(hD + i'l' + jF) \\ &\quad - \sum_{h,i,j} S_{hij}(30^\circ) \sin(hD + i'l' + jF), \\ \Phi_{-30^\circ}(t) &= \sum_{h,i,j} C_{hij}(30^\circ) \cos(hD + i'l' + jF) \\ &\quad + \sum_{h,i,j} S_{hij}(30^\circ) \sin(hD + i'l' + jF). \end{aligned} \right\} \text{ et } \left. \begin{aligned} \Phi_{30^\circ}(t) &= \sum_{h,i,j} C_{hij}(30^\circ) \cos(hD + i'l' + jF) \\ &\quad - \sum_{h,i,j} S_{hij}(30^\circ) \sin(hD + i'l' + jF), \\ \Phi_{-30^\circ}(t) &= \sum_{h,i,j} C_{hij}(30^\circ) \cos(hD + i'l' + jF) \\ &\quad + \sum_{h,i,j} S_{hij}(30^\circ) \sin(hD + i'l' + jF). \end{aligned} \right\}$$

Donnons aux arguments l, D, l' et F les valeurs provisoires trouvées au c. Nous déduisons de la valeur de $l_0, 2P$ valeurs du temps pour lesquelles $l = \pm 30^\circ$. Nous interpolons $F(t)$ pour ces valeurs du temps et calculons

les valeurs prises par les lignes trigonométriques de $hD + iI' + jF$. Nous avons ainsi 2P équations à 2N — 1 inconnues (en effet, la combinaison $h = 0, i = 0, j = 0$ ne donne pas d'inconnue S_{000}) que nous résolvons par les moindres carrés.

Calculons les résidus, puis leur moyenne dans les quatre cas suivants :

Δr_1^+ , 1^{re} moitié de l'intervalle d'intégration, $l_0 = + 30^\circ$;

Δr_2^+ , 2^e moitié de l'intervalle d'intégration, $l_0 = + 30^\circ$;

Δr_1^- , 1^{re} moitié de l'intervalle d'intégration, $l_0 = - 30^\circ$;

Δr_2^- , 2^e moitié de l'intervalle d'intégration, $l_0 = - 30^\circ$.

On vérifie que

$$\Delta r_1^+ = - \Delta r_1^- \quad \text{et} \quad \Delta r_2^+ = - \Delta r_2^-.$$

A l'aide de valeurs moyennes de a et e , on peut calculer la valeur moyenne que prend l'anomalie vraie v_0 pour $l_0 = 30^\circ$. On sait que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{n}{a} \frac{dr}{dt} = \frac{nae \sin v_0}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

On aura donc

$$\Delta l = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ae \sin v_0} \Delta r.$$

On aura Δl_1 moyen pour la première moitié de l'intervalle d'intégration $t_1 - t_0$ et Δl_2 moyen pour la deuxième moitié. Les corrections à appliquer à l sont

$$\Delta n_1 = 2 \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{t_1 - t_2}, \quad \Delta l_0 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2}.$$

On pourra refaire un calcul analogue pour une autre valeur de l .

Refaisons maintenant ce calcul et celui des résidus avec le nouvel argument

$$l = n_f t + l_0$$

et les arguments

$$F = n_F t + F_0,$$

$$D = n_D t + D_0.$$

Puis calculons les variations des résidus pour chacune des six variations arbitraires $\Delta n_l, \Delta n_F, \Delta n_D, \Delta l_0, \Delta F_0$ et ΔD_0 des constantes intervenant dans ces arguments. Nous formerons des équations aux variations non à l'aide des résidus eux-mêmes, mais à l'aide de groupes de résidus moyennés sur plusieurs valeurs successives du temps. La résolution de ces équations par les moindres carrés donnera les corrections cherchées.

f. Recherche des termes significatifs manquants. — Nous recalculons les résidus avec les nouveaux arguments. La valeur de ces résidus est une estimation de la précision avec laquelle se fera en définitive l'analyse harmonique. A ce stade, on pourra aussi essayer de représenter ces résidus par des termes non retenus jusqu'à maintenant. Si certains d'entre eux donnent des coefficients comparables aux résidus, il faudra les inclure dans l'analyse harmonique. Les nouveaux résidus seront mis dans les seconds membres des équations aux conditions du e pour déterminer une nouvelle correction des arguments.

Remarquons que la recherche des termes significatifs et l'amélioration des arguments peuvent se faire pratiquement ensemble. L'importance des calculs liés à ces déterminations sera fonction de la précision recherchée. L'exemple des chapitres suivants ainsi que la discussion des résultats montrent, qu'en fait, ils sont assez rapides.

7. Fin du calcul. — A l'aide de la valeur corrigée des arguments, nous pouvons maintenant interpoler chaque élément pour les valeurs du temps donnant à l les valeurs l_0 , par exemple de 15° en 15° . (Pour Ω , ω et M on les corrigera d'abord de leur partie linéaire $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$ et $\bar{M}$ déduite des arguments définitifs.) Nous calculons les valeurs prises par les lignes trigonométriques intervenant dans les seconds membres des équations (11) et (12). Nous obtenons ainsi un certain nombre de systèmes de $2P$ équations à $2N + 1$ inconnues avec six seconds membres différents, que nous résolvons par les moindres carrés. En fait, pour faciliter le calcul de certaines quantités lors de la substitution des résultats dans les seconds membres des équations de Lagrange, on aura intérêt aussi à analyser certaines fonctions comme $\sqrt{a}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{\sin i}$, chaque quantité supplémentaire à analyser représentant un nouveau système d'équations ne différant des autres que par ses seconds membres.

Nous obtenons ainsi $2N - 2$ quantités $C_{hij}(l_0)$ et $S_{hij}(l_0)$, ainsi que $C_{000}(l_0)$.

Nous mettons ces résultats dans les premiers membres des équations (10) que nous résolvons toujours par la méthode des moindres carrés et obtenons ainsi les A_{hijk} cherchés.

On peut éliminer les termes non significatifs et écrire les éléments sous la forme

$$(15) \quad F(t) = \sum_{h,i,j,k} A_{hijk} \cos(hD + iD' + jF + kL).$$

Il ne faudra pas considérer ces séries comme définitives. Elles devront être substituées dans les seconds membres des équations de Lagrange qui seront intégrées pour obtenir une seconde approximation. Nous discuterons plus en détail de cette partie du calcul dans le chapitre V.

CHAPITRE II.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AU VIII^e SATELLITE DE JUPITER.

Le VIII^e satellite de Jupiter a été découvert par P. Melotte à Greenwich [16]. De nombreux travaux ont été consacrés par divers auteurs à l'étude de son mouvement et se classent en deux catégories. Certains auteurs, tels Crommelin [17], Boeva [18], Grosch [19], Koulikov [20] et plus récemment Herget (non publié) ont essayé de représenter les observations par une intégration numérique du mouvement. D'autres, tels Troussel [21], Proskourine [22] et surtout Brown [10], [6] et Brouwer [6], dont le travail a été discuté par Proskourine [23] ont essayé de donner une théorie analytique de ce mouvement. J'ai déjà discuté [5] ces diverses théories et je n'y reviendrai au cours de l'exposé que pour comparer les meilleurs résultats, obtenus par ces auteurs, aux miens.

8. **Éléments du problème du VIII^e satellite de Jupiter.** — Le problème du VIII^e satellite de Jupiter est un problème du même type que celui de la Lune, mais rendu plus difficile par suite des valeurs prises par les paramètres du mouvement :

	Lune.	Jupiter VIII.
$\frac{n'}{n}$	0,0748	0,172
e	0,055	0,40
i	5°1	148° (rétrograde)

Ainsi tous les développements en série qu'on fait dans la théorie de la Lune par rapport à ces quantités, convergent-ils beaucoup plus lentement. La théorie la plus complète à ce jour est celle de Brown et Brouwer ([10] et [6]) destinée principalement à résoudre la difficulté introduite par les grandes valeurs de $\frac{n'}{n}$ et de e . Malheureusement, la complexité des calculs les a empêchés d'introduire aussi l'inclinaison au même stade du calcul, si bien que leur solution pêche principalement par l'insuffisance des termes contenant F . Proskourine [23] a comparé cette théorie aux observations. Les écarts atteignent 12' en α et en δ et croissent rapidement avec le temps, ce qui confirme la nécessité d'une nouvelle théorie.

L'intérêt qu'il y aurait à obtenir une bonne théorie générale de ce

satellite est double. D'une part, une théorie générale est plus satisfaisante pour l'esprit que l'intégration numérique car elle s'étend, en principe, à un intervalle de temps non limité, et permet de donner une explication aux principales inégalités observées. D'autre part, argument déjà cité dans l'introduction, une théorie générale approchée serait la base de départ pour une détermination de la masse du système jovien, supérieure à toutes celles qui existent.

Ainsi, l'absence de théorie générale satisfaisante nous a conduit à essayer la méthode proposée au premier chapitre. La valeur prise par certains paramètres nous obligera à modifier cette méthode dans certains de ses détails. Cependant, la réussite de ce calcul pour ce mouvement particulièrement complexe sera la preuve de sa validité pour les autres mouvements de satellites du Système solaire, aux éléments moins extrêmes.

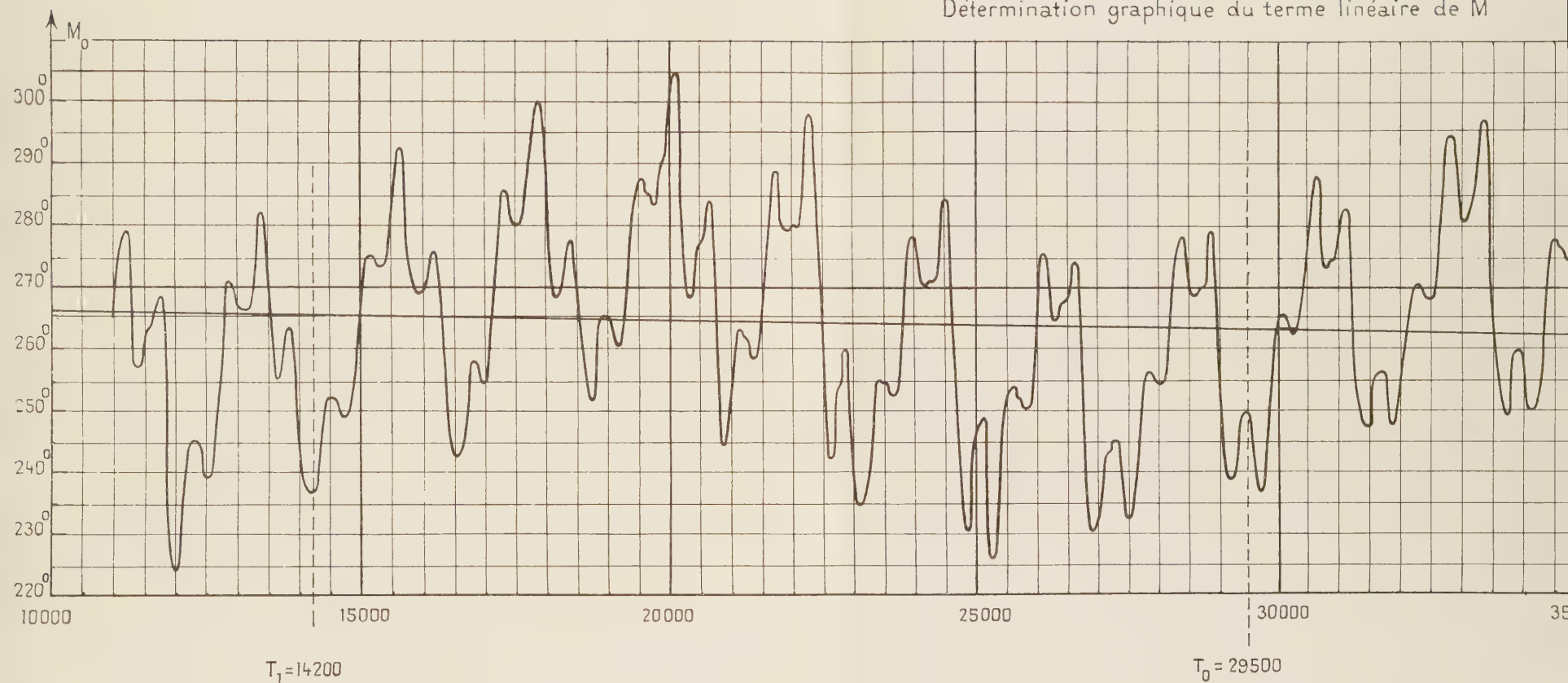
9. Rattachement des calculs aux observations. - Comme nous l'avons indiqué, l'intégration doit être faite en éliminant l'effet des perturbations planétaires, dans ce cas surtout celles de Saturne. L'orbite de Jupiter choisie avait les caractéristiques suivantes :

$$1950,0 \left\{ \begin{array}{l} a = 5.202\,814\,3; \\ e = 0,048\,401\,10; \\ i = 1^{\circ}18'22'',8; \\ \Omega = 99^{\circ}55'23'',7; \\ \varpi = 13^{\circ}29'32'',8; \\ M = 316^{\circ}50'29'',34 \quad \text{pour le jour julien } 2\,429\,120,5 \quad (10 \text{ août } 1938). \end{array} \right.$$

Ce sont les éléments moyens de Jupiter à la date indiquée. La masse du Système de Jupiter choisie est $1/1\,047,355$. On tient compte des perturbations des quatre premiers satellites de Jupiter en supposant leur masse concentrée au centre de gravité du système.

Le rattachement aux observations doit se faire sur un intervalle de temps court, pour que les perturbations dues à Saturne ne donnent pas de grosses différences systématiques. En particulier, il faut éviter qu'il y ait dans l'intervalle une conjonction Jupiter-Saturne. C'est ainsi que sur les quelque 250 observations existant entre 1908 et 1946, on en a conservé 77 réparties sur huit années entre 1930 et 1938 (les conjonctions Jupiter-Saturne ont eu lieu en 1921 et en 1941, mais le satellite a été perdu entre 1923 et 1930). En fait, je me suis servi des 16 positions normales calculées par D. K. Koulikov [20] et qui sont reproduites dans le tableau I. Pour la comparaison avec les observations, j'ai utilisé les positions du Soleil du *Nautical Almanac* et celles de Jupiter étaient tirées des *Coordonnées des planètes extérieures* [1].

Détermination graphique du terme linéaire de M



En abscisse : $(T - 2\,400\,000,5)$ jours juliens; En ordonnée : $M_0 = M - 0^{\circ},484\,358\,658\,5 (T -$

TABEAU I.

Positions normales entre 1930 et 1938.

N ^o .	Date.			Jour Julien 2 400 000 +.	α 1950,0.	δ 1950,0.	Nombre obs.
	An.	Ms.	Jr.				
1.....	1930	11	29	26 309,927 80	^h 7 ^m 32 ^s 56,220	+22 41' 16",80	1
2.....	1930	12	18	26 329,146 81	7 25 39,139	+22 53 47,32	8
3.....	1930	12	28	26 339,469 92	7 20 14,505	+22 59 42,77	5
4.....	1931	1	21	26 362,797 79	7 06 47,567	+23 08 58,12	5
5.....	1931	2	12	26 384,955 41	6 56 19,613	+23 08 21,48	4
6.....	1932	2	9	26 746,997 29	9 19 06,085	+17 26 39,53	4
7.....	1932	3	6	26 772,852 16	9 07 35,169	+18 27 56,01	7
8.....	1934	3	12	27 509,498 09	13 32 33,353	- 6 55 14,62	8
9.....	1934	4	11	27 539,122 22	13 20 15,571	- 5 30 22,18	8
10.....	1934	5	12	27 570,070 16	13 07 22,275	- 4 12 17,95	7
11.....	1935	5	9	27 931,794 10	15 02 33,277	-16 17 53,69	2
12.....	1935	6	5	27 959,024 99	14 50 33,304	-15 38 24,65	4
13.....	1938	7	29	29 108,864 76	22 04 24,064	-11 39 21,66	5
14.....	1938	8	24	29 135,444 45	21 51 09,621	-12 54 47,61	2
15.....	1938	10	22	29 193,626 10	21 33 46,736	-14 38 02,72	2
16.....	1938	11	18	29 221,024 48	21 39 31,492	-14 17 26,89	5

10. **Amorçage de l'intégration numérique.** La date de départ est $t_0 =$ jour julien 2 429 200,5 choisie pour coïncider avec l'intégration de Grosch [19] afin d'éviter les premiers tâtonnements. Une erreur dans la rédaction de ce travail a d'ailleurs rendu vaine cette précaution.

L'intégration est faite en coordonnées rectangulaires, le plan xOy étant le plan du mouvement de Jupiter défini au paragraphe précédent, Ox étant dirigé vers le nœud ascendant de cette orbite sur l'écliptique 1950,0.

Nous prenons pour données initiales, la position et la vitesse du satellite par rapport aux axes parallèles aux précédents, passant par Jupiter, soit

$$\vec{JS}_0 \begin{cases} x = -0,186\,309\,183, \\ y = +0,006\,505\,801, \\ z = +0,077\,551\,675; \end{cases} \quad \frac{d\vec{JS}_0}{dt} \begin{cases} x' = +0,000\,202\,981\,72, \\ y' = +0,000\,896\,186\,10, \\ z' = -0,000\,333\,704\,08. \end{cases}$$

On a extrapolé cette position en se servant des formules de Taylor

$$(16) \quad x(t) = x(0) + t x'(0) + \frac{t^2}{2} x''(0) + \frac{t^3}{6} x'''(0) + \frac{t^4}{24} x^{IV}(0) + \frac{t^5}{120} x^V(0)$$

et deux formules analogues avec y et z et où, si l'on pose $X, Y, Z = 0$, coordonnées jovicentriques du Soleil,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \Delta = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2},$$

M la masse du Soleil, m celle de Jupiter.

On a

$$x'' = -\frac{k^2 m x}{r^3} + k^2 M \left(\frac{X-x}{\Delta^3} - \frac{X}{R^3} \right), \\ x''' = -\frac{k^2 m x'}{r^3} + \frac{3 k^2 m x r'}{r^6} + k^2 M \left(\frac{X' - x'}{\Delta^3} - \frac{X'}{R^3} \right) - 3 k^2 M \left(\frac{\Delta' (X-x)}{\Delta^4} - \frac{X R'}{R^4} \right),$$

r', R' et Δ' étant les dérivées de r, R et Δ et ainsi de suite, on a calculé tous les termes de x^{iv} et certains termes de x^v susceptibles de donner des contributions à (16) supérieures à 10^{-10} pour $t = 2,5$ jours.

Ce formulaire en apparence lourd est, une fois programmé sur machine électronique, d'utilisation très commode pour un calcul à double précision. Il s'apparente au formulaire que j'avais proposé pour la détermination des orbites par la méthode de Laplace [24].

En définitive, utilisant cette formule (16) avec un pas de 2,5 jours, on a obtenu les positions calculées pour les quatre dernières positions normales du tableau I. Le calcul étant fait avec 12 décimales, 9 décimales sont assurées pour le résultat de ce calcul.

En conservant la distance géocentrique et la vitesse radiale, on a fait subir aux données initiales des variations unité de position $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ ou de vitesse $\Delta\alpha'$ et $\Delta\delta'$ et refait l'extrapolation pour chacun de ces cas. La variation des résidus ainsi constatée a permis de calculer les variations de position et de vitesse nécessaires pour réduire les résidus. En définitive, on a obtenu des résidus inférieurs à $1'',2$ pour les données initiales suivantes :

$$\overset{\rightarrow}{JS}_0 \begin{cases} x = -0,186\ 447\ 048, \\ y = +0,006\ 663\ 503, \\ z = +0,077\ 571\ 163; \end{cases} \quad \frac{d\overset{\rightarrow}{JS}_0}{dt} \begin{cases} x' = +0,000\ 203\ 832\ 37, \\ y' = +0,000\ 895\ 205\ 36, \\ z' = -0,000\ 334\ 269\ 37. \end{cases}$$

11. Intégration numérique. — Pour l'intégration numérique proprement dite, on a employé la méthode de Cowell, en négligeant les différences dixièmes des attractions. L'examen de ces différences a montré que, en général, les erreurs introduites par cette approximation étaient négligeables avec un pas de 5 jours. Cependant, ce n'est pas vrai dans le cas de périjoves particulièrement rapprochés et nous avons dû alors réduire le pas à 2,5 jours.

La formule de Cowell peut s'écrire (*voir* aussi l'intégration du mouvement des cinq planètes extérieures [1]) :

$$(17) \quad x(t) - {}^uX(t) = \frac{1}{12} X(t) - \frac{1}{240} X''(t) + \frac{31}{60 \cdot 480} X^{iv}(t) \\ - \frac{289}{3 \cdot 628 \cdot 800} X^{vi}(t) + \frac{317}{22 \cdot 809 \cdot 600} X^{viii}(t),$$

où $X(t)$ est l'accélération et où l'on suppose que les différences X^x sont nulles, ceci peut s'écrire

$$159\,667\,200 [x(t) - {}^uX(t)] = + 113\,257\,214 X(t-1) - 470\,982\,463 X(t-2) \\ + 1\,207\,940\,748 X(t-3) - 2\,069\,052\,724 X(t-4) \\ + 2\,449\,952\,000 X(t-5) - 2\,023\,224\,114 X(t-6) \\ + 1\,148\,601\,188 X(t-7) - 428\,607\,748 X(t-8) \\ + 94\,880\,274 X(t-9) - 9\,458\,775 X(t-10).$$

Une telle formule accélère le calcul sur machine électronique, car elle dispense du calcul de toutes les différences. D'autre part, elle permet d'employer aisément une double précision dans les calculs intermédiaires de façon que les erreurs d'arrondi ne dépassent pas une unité de la 10^e décimale à chaque pas.

Le démarrage de l'intégration se faisant comme il est indiqué au paragraphe précédent, on a dès le début suffisamment de valeurs des coordonnées, donc des accélérations, pour appliquer les formules (17) et faire progresser l'intégration.

Partant des données initiales obtenues à la fin du paragraphe précédent, nous avons intégré sur huit années vers les temps négatifs, et calculé les résidus pour les 16 positions normales du tableau I. Ensuite, on a recalculé ces résidus en faisant varier dans les conditions initiales, soit la distance géocentrique, soit l'une des trois composantes de la vitesse. On a ainsi établi 16 équations aux variations pour représenter les résidus trouvés. On a résolu ce système par les moindres carrés. Les corrections ainsi déterminées, ajoutées aux conditions initiales, ont permis de refaire une intégration sur huit ans et de recalculer de nouveaux résidus. En définitive, on s'est arrêté à la troisième itération. Le tableau II donne les résidus, comparés avec ceux de la première itération et ceux obtenus respectivement par Grosch [19] et Koulikov [20] dans leurs intégrations.

L'écart quadratique moyen est de 8'', alors qu'il est de 25'' chez Grosch et 5'' chez Koulikov. Cette intégration n'est donc pas la meilleure possible. En effet, nous n'avons pas introduit de nouvelle correction en α et en δ pour diminuer les résidus et, par hypothèse, nous n'avons pas introduit les perturbations de Saturne. L'excellent résultat obtenu par Koulikov l'a été non seulement compte tenu des perturbations de Saturne, mais aussi en modifiant la masse de Jupiter. Ainsi nous pouvons considérer

cette intégration comme équivalente du point de vue précision à celle de Koulikov. Il est, en fait, inutile de rechercher une meilleure représentation des données, car nous intégrons dans un cas idéal, et il suffit que son écart par rapport au réel soit inférieur à la précision escomptée de l'analyse. Les écarts sont cependant suffisamment petits pour justifier le bien-fondé de la méthode d'intégration.

TABLEAU II.

Résidus des diverses intégrations numériques entre 1930 et 1938.

N ^o pos. normales.	Résidus 1 ^{re} approximation. †		Résidus définitifs.		Résidus Grosch.		Résidus Koulikov.	
	$\Delta x''$.	$\Delta \delta''$.	$\Delta x''$.	$\Delta \delta''$.	$\Delta x''$.	$\Delta \delta''$.	$\Delta x''$.	$\Delta \delta''$.
1.....	- 277	+ 514	- 7	- 7	- 14	+ 26	+ 5	- 1
2.....	110	+ 607	- 8	- 9	- 7	+ 29	+ 2	- 3
3.....	+ 2	+ 651	- 9	- 7	- 1	+ 34	+ 3	- 2
4.....	+ 303	+ 711	- 12	- 5	+ 9	+ 39	- 3	- 1
5.....	+ 630	+ 687	- 10	- 5	+ 31	+ 40	- 1	- 2
6.....	- 594	- 113	- 3	+ 10	- 28	- 7	+ 3	+ 1
7.....	- 555	- 82	- 1	+ 9	- 24	- 4	+ 5	+ 3
8.....	- 237	- 31	+ 2	+ 4	- 11	- 2	+ 1	0
9.....	- 199	- 21	- 1	+ 4	- 10	- 1	- 1	+ 1
10.....	- 153	- 12	0	+ 2	- 6	- 3	+ 2	0
11.....	- 44	+ 217	+ 2	+ 6	+ 1	+ 15	+ 5	+ 6
12.....	- 348	+ 126	- 5	+ 9	- 26	+ 10	- 9	+ 4
13.....	0	0	+ 2	- 2	0	0	+ 4	+ 2
14.....	+ 1	0	+ 4	- 1	- 1	- 1	+ 6	+ 3
15.....	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 3
16.....	- 1	- 1	- 4	- 1	0	0	+ 1	+ 3

C'est ainsi que cette dernière approximation a été conservée définitivement. Elle correspond aux conditions initiales suivantes :

$$J\vec{S}_0 \begin{cases} x = -0,185\,921\,387\,4, \\ y = +0,007\,123\,763\,7, \\ z = +0,077\,562\,830\,7; \end{cases} \quad \frac{dJ\vec{S}_0}{dt} \begin{cases} x' = +0,000\,206\,230\,159, \\ y' = +0,000\,894\,287\,280, \\ z' = -0,000\,335\,610\,452. \end{cases}$$

Nous avons étendu l'intégration sur 100 années centrées sur la date origine, soit entre J. J. 2 411 000,5 (29 décembre 1888) et J. J. 2 447 500,5 (5 décembre 1988).

Le calcul, fait sur I. B. M. 650, utilise un programme d'intégration suivant la méthode de Cowell décrit ci-dessus, pouvant fonctionner indif-

féremment avec un pas de ± 5 ou $\pm 2,5$ jours. Simultanément, mais avec un retard de six pas, on calcule la vitesse par la méthode des différences centrales en négligeant les différences onzièmes [25]

$$(18) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}(\delta x_{\frac{1}{2}} + \delta x_{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{12}(\delta^3 x_{\frac{1}{2}} + \delta^3 x_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{60}(\delta^5 x_{\frac{1}{2}} + \delta^5 x_{-\frac{1}{2}}) \\ - \frac{1}{840}(\delta^7 x_{\frac{1}{2}} + \delta^7 x_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{1560}(\delta^9 x_{\frac{1}{2}} + \delta^9 x_{-\frac{1}{2}})$$

qui, transformée en fonction des valeurs prises par x , donne, si h est le pas,

$$2520 h x'(t) = + 2 x(t+5) - 25 x(t+4) + 150 x(t+3) \\ - 600 x(t+2) + 2100 x(t+1) - 2100 x(t-1) \\ + 600 x(t-2) - 150 x(t-3) + 25 x(t-4) - 2 x(t-5).$$

On calcule aussi le rayon vecteur pour chaque pas. Un test sur la valeur du rayon vecteur permet d'arrêter le programme lorsque les différences dixièmes de l'accélération risquent de devenir trop grandes. Dans ce cas, les dernières cartes sorties sont utilisées par un programme réalisant la dichotomie de l'intervalle, à l'aide de la formule de Bessel

$$(19) \quad x_{\frac{1}{2}} = \frac{x_0 + x_1}{2} - \frac{1}{16}(\delta^2 x_0 + \delta^2 x_1) + \frac{3}{256}(\delta^4 x_0 + \delta^4 x_1) \\ - \frac{5}{2048}(\delta^6 x_0 + \delta^6 x_1) + \frac{35}{65536}(\delta^8 x_0 + \delta^8 x_1) \\ - \frac{63}{524288}(\delta^{10} x_0 + \delta^{10} x_1)$$

et qui, transformée en fonction des valeurs prises par la fonction, donne

$$524288 x\left(t + \frac{1}{2}\right) = - 63 x(t+6) + 847 x(t+5) - 5445 x(t+4) \\ + 22869 x(t+3) - 76230 x(t+2) + 320166 x(t+1) \\ + 320166 x(t) - 76230 x(t-1) + 22869 x(t-2) \\ - 5445 x(t-3) + 847 x(t-4) - 63 x(t-5).$$

Nous avons dû diviser l'intervalle en deux lors des passages au périjove suivants :

Octobre 1898	Mai 1935	Février 1976
Septembre 1900	Mai 1941	Mars 1982
Novembre 1904	Juin 1947	Février 1984

Nous reprenons l'intervalle de 5 jours dès que la zone dangereuse était franchie.

12. Précision de l'intégration numérique. — Le programme a été écrit de telle façon que l'erreur d'arrondi ne dépasse pas 10^{-9} sur les

coordonnées. Si n est le nombre de pas, l'accumulation des erreurs de ce type n'atteindra pas $10^{-9} n^{\frac{1}{2}}$ [26]. Pour un intervalle d'intégration de 8 ans, n est voisin de 600 et l'erreur sur les coordonnées est de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-3}$, soit des erreurs inférieures à $1''$ en α et δ . Elles sont ainsi nettement plus petites que les $(o - c)$ donnés dans le tableau II. Pour tout le demi-intervalle d'intégration, soit 50 ans, ces erreurs ne dépassent pas $15''$.

Les différences dixièmes des attractions ont été négligées. Leur valeur absolue est une fonction décroissante du rayon vecteur. On a trouvé en faisant plusieurs essais qu'elle atteint $2 \cdot 10^4$ fois la dernière décimale des attractions, soit $2 \cdot 10^{-9}$ pour $r = 0,075$. D'après une étude analogue faite pour l'intégration des planètes extérieures [1], leur effet sur les coordonnées, directement dans la formule de Cowell ou indirectement par leur effet sur les différences d'ordre plus faible, est inférieur à $7 \cdot 10^{-2} |\Delta_{10}|$. On a donc ainsi une erreur de $1,5 \cdot 10^{-11}$ sur les coordonnées. Mais celle-ci croît très rapidement quand r décroît, aussi a-t-on, dès que cette limite était atteinte, divisé l'intervalle en deux, ce qui a pour effet de diviser ces différences par $4 \cdot 10^3$. Leur effet est donc négligeable par rapport aux erreurs d'arrondi tout le long de l'intervalle d'intégration.

TABLEAU III.

Résidus à l'extérieur de l'intervalle de raccordement.

Date (T. U.) + aberration.		Intégration numérique.	
		$(o - c)_{\alpha}''$	$(o - c)_{\delta}''$
1908 Février	3,956 60	+ 65	+ 25
1909 Mai	10,948 26	+ 25	0
1910 Avril	27,342 50	+ 10	+ 50
1911 Juin	21,843 06	+ 60	— 15
1912 Juin	16,310 41	— 45	+ 50
1913 Juillet	29,843 21	— 5	+ 20
1914 Juillet	23,402 01	+ 25	+ 5
1916 Décembre	16,843 26	— 15	— 40
1922 Avril	18,240 82	+ 20	+ 10
1941 Novembre	25,219 23	+ 10	+ 30
1946 Avril	30,318 80	— 35	+ 30

Les seules sources d'erreurs rendant compte des $(o - c)$ sont donc l'imprécision des éléments initiaux, les hypothèses simplificatrices concernant le mouvement de Jupiter et les perturbations par les autres planètes.

Le tableau III, complétant le tableau II, donne les $(o - c)$ de l'intégration numérique pour 11 observations prises au hasard dans les 11 oppositions pour lesquelles il y a eu un nombre important d'observations. Ils sont donnés à 5'' près. On n'a pas tenu compte de l'effet de parallaxe.

Les écarts dus à cette cause d'erreur atteignent ainsi 1' pour un intervalle d'intégration de 40 années. C'est là l'ordre de grandeur de la meilleure précision avec laquelle on peut espérer obtenir une théorie générale à partir de cette intégration numérique.

13. Calcul des éléments et de leurs dérivées. — Nous avons donc dans l'intervalle d'intégration, tous les cinq jours, les coordonnées x, y, z du satellite par rapport aux axes jovicentriques définis au paragraphe 10, les composantes de la vitesse x', y', z' ainsi que le rayon vecteur r . Par les formules classiques de détermination des orbites, nous calculons les éléments (*voir*, par exemple, [15]).

Le formulaire employé se résume ainsi

$$e_x = y'z' - zy', \quad e_y = zx' - xz', \quad e_z = xy' - yx';$$

$$p = \frac{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}{h^2 m};$$

$$\Omega = \arctg\left(-\frac{e_x}{e_y}\right), \quad \cos \Omega \text{ du signe de } e_y;$$

$$i = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}{e_z}\right);$$

$$e = \sqrt{1 + \left[\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{h^2 m} - \frac{1}{r}\right] p};$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

et si l'on pose

$$x_N = x \cos \Omega + y \sin \Omega,$$

$$y_N = -x \sin \Omega \cos i + y \cos \Omega \cos i + z \sin i,$$

on a

$$\omega + v = \arctg\left(\frac{y_N}{x_N}\right), \quad \cos(\omega + v) \text{ du signe de } x_N;$$

$$v = \arctg\left(\frac{\sqrt{p} \frac{xx' + yy' + zz'}{p - r}}{p - r}\right), \quad \cos v \text{ du signe de } (p - r).$$

d'où l'on tire ω ,

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2};$$

$$M = u - e \sin u.$$

Ensuite, nous avons décidé de calculer les dérivées de ces éléments, non pas en dérivant les éléments tabulés, mais en employant les équations

de Lagrange. En principe, ce calcul est inutile pour l'application de la méthode exposée au premier chapitre; mais l'objet de ce travail est non seulement l'étude du VIII^e satellite, mais l'étude de la puissance de cette méthode. Il a paru utile d'effectuer l'analyse harmonique aussi sur les dérivées des éléments et de vérifier la précision intrinsèque de l'analyse en comparant les séries représentant les éléments, aux intégrales des séries représentant les dérivées de ces éléments, le calcul de ces dernières étant effectué de façon absolument indépendante.

Si, $X, Y, o(R)$ sont les coordonnées du Soleil, $x, y, z(r)$, celles du satellite, la distance Δ du Soleil au satellite est donnée par

$$\Delta^2 = r^2 + R^2 - 2(xX + yY).$$

Posons

$$A = xX + yY \quad \text{et} \quad B = r^2 + R^2,$$

et soit E un élément quelconque.

La fonction perturbatrice est

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= k^2 m \left(\frac{1}{\sqrt{B - 2A}} - \frac{A}{R^3} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial E} &= k^2 m \left[-\frac{1}{2\Delta^3} \left(\frac{\partial B}{\partial E} - 2 \frac{\partial A}{\partial E} \right) - \frac{1}{R^3} \frac{\partial A}{\partial E} \right] \end{aligned}$$

et comme

$$\frac{\partial A}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E}, \quad \frac{\partial B}{\partial E} = 2r \frac{\partial r}{\partial E}.$$

On a

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial E} = k^2 m \left[\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{R^3} \right) \left(X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} \right) - \frac{r}{\Delta^3} \frac{\partial r}{\partial E} \right].$$

Or on sait qu'on a

$$\begin{aligned} x &= r \cos(v + \omega) \cos \Omega - r \sin(v + \omega) \cos i \sin \Omega, \\ y &= r \cos(v + \omega) \sin \Omega + r \sin(v + \omega) \cos i \cos \Omega, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial i} = -r \sin(v + \omega) \sin \Omega \sin i, \\ \frac{\partial y}{\partial i} = -r \sin(v + \omega) \cos \Omega \sin i; \end{cases} \\ (b) \quad & \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \omega} = -r \sin(v + \omega) \cos \Omega - r \cos(v + \omega) \cos i \sin \Omega = \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} = -r \sin(v + \omega) \sin \Omega + r \cos(v + \omega) \cos i \cos \Omega = \frac{\partial y}{\partial v}; \end{cases} \\ (c) \quad & \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \Omega} = -r \cos(v + \omega) \sin \Omega - r \sin(v + \omega) \cos i \cos \Omega = -y, \\ \frac{\partial y}{\partial \Omega} = r \cos(v + \omega) \cos \Omega - r \sin(v + \omega) \cos i \sin \Omega = x; \end{cases} \\ (d) \quad & \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

On peut déjà appliquer (20) pour les éléments i , ω et Ω , car alors $\frac{dr}{dE} = 0$.
Pour les trois autres éléments, a , e et M , on aura

$$(21) \quad \frac{\partial x}{\partial E} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial E} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial E}, \quad \frac{\partial y}{\partial E} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial E} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial E},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}, & \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos v, & \frac{\partial r}{\partial M} &= \frac{ae \sin v}{\sqrt{1-e^2}}; \\ \frac{\partial v}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial e} &= \sin v \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right), & \frac{\partial v}{\partial M} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}. \end{aligned}$$

On calcule d'abord les expressions (21), puis on reporte dans (20).

En définitive, en posant

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{na}, & C &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}, & B &= \sqrt{1-e^2} C, \\ E &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}, & D &= E \cos i, & n^2 a^3 &= k^2 m, \end{aligned}$$

on calcule les deuxièmes membres des équations de Lagrange (voir, par exemple, Moulton [27])

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, & \frac{d\Omega}{dt} &= E \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}; \\ \frac{de}{dt} &= B \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - C \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, & \frac{d\omega}{dt} &= -D \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} + C \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}; \\ \frac{di}{dt} &= D \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - E \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, & \frac{dM}{dt} &= n - B \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - A \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}. \end{aligned}$$

14. Première détermination des arguments. — Appliquons aux éléments ainsi obtenus la méthode exposée au c du paragraphe 6.

On a tracé les courbes ω , Ω et $M - 0^{\circ}, 484\,358\,658\,5 (t - t_0) = M_0$ à l'échelle 1 mm pour 5 jours et pour $0^{\circ}, 1$. La figure 1 avait déjà montré la courbe M_0 à une échelle très réduite.

Les extrémités des intégrales (13) ont été respectivement

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\,414\,200, & T_0 &= 2\,429\,200, & T_2 &= 2\,444\,660 & \text{pour } M_0, \\ T_1 &= 2\,414\,350, & T_0 &= 2\,429\,500, & T_2 &= 2\,444\,810 & \text{pour } \Omega \text{ et } \omega, \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé les angles moyens suivants :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= + 0^{\circ}, 012\,155\,95 (t - t_0) + 302^{\circ}, 289, \\ \bar{\omega} &= - 0^{\circ}, 012\,193\,76 (t - t_0) - 258^{\circ}, 021, \\ M &= - 0^{\circ}, 484\,223\,26 (t - t_0) - 263^{\circ}, 269. \end{aligned}$$

Les arguments fondamentaux sont dès lors

$$\begin{aligned} l &= -0,484\,223\,26 \quad (t - t_0) - 263,269, \\ l' &= +0,083\,091\,215\,7(t - t_0) + 323,489, \\ D &= -0,567\,352\,29 \quad (t - t_0) + 264,331, \\ F &= -0,496\,417\,02 \quad (t - t_0) + 198,710. \end{aligned}$$

15. **Choix des termes principaux.** — Prenant le développement de la longitude moyenne du mouvement de la Lune de Delaunay [3], nous y avons substitué des valeurs approchées de e , γ , $\frac{n'}{n}$ et $\frac{a'}{a}$. Plus de 100 termes sont supérieurs à $200''$, représentant les 29 combinaisons des coefficients de D , l' et F suivantes :

Terme constant (*)	2 D	(*)	2 D + l' - 2 F	D		
l'	(*)	2 D + l'	(*)	2 D - l' - 2 F (*)	D + l'	
l' - 2 F		2 D - l'	(*)	2 D + 4 F	D - l' (*)	
l' + 2 F		2 D - 2 l'		2 D - 4 F (*)	D + 2 F	
2 F	(*)	2 D + 2 F	(*)	4 D	(*)	D - 2 F (*)
4 F	(*)	2 D - l' + 2 F		4 D + 2 F		3 D (*)
		2 D + l' + 2 F		4 D - 2 F		3 D - 2 F (*)
		2 D - 2 F (*)		6 D		

L'analyse harmonique devra en principe porter sur ces 29 combinaisons, si l'on veut tenir compte des termes de $200''$, soit environ $8''$ en α et en δ .

Ces 29 termes donneront 57 inconnues dans le système d'équations (14). Mais comme en 100 années, il y a 48 périodes de l , on aura 96 équations à 57 inconnues. Il n'y a donc pas lieu d'allonger l'intervalle d'intégration pour permettre le calcul des inconnues.

Par contre, nous avons calculé les périodes des termes ainsi choisis. Tous sauf un ont des périodes inférieures à 40 années. L'exception est due à $D + l' - l$.

On sait que, par définition,

$$D = l + \varpi - (l' + \varpi').$$

Donc

$$D + l' - l = \varpi - \varpi' = \Omega + \varpi - \varpi' = -0,000\,037\,81(t - t_0) + 131,089.$$

C'est, par définition, le mouvement du périjove, dont la période est ainsi de l'ordre de 25 000 ans. Les théories précédentes donnaient 1000 ans pour cette période, mais l'imprécision des résultats était telle qu'on pouvait aussi bien s'attendre à avoir 400 ans que 25 000 ans. Cependant, si l'on pouvait songer à multiplier par 4 ou 5 l'intervalle d'intégration, il ne pouvait être question de le multiplier par 250. Nous nous heurtons ici à un problème analogue au problème, toujours pas résolu, de la théorie générale des mouvements planétaires. En effet, par exemple,

la théorie générale du système Jupiter-Saturne fait intervenir une période de 60 000 ans due au mouvement du périhélie, à peine deux fois et demi plus longue. Des travaux sont actuellement entrepris par D. Brouwer [28] pour résoudre ce problème. Par contre, tout en ignorant l'aspect « théorie générale » de ce problème, nous pouvons lui donner une solution analogue à celle qui est adoptée pour les mouvements planétaires. Nous allons consacrer le chapitre suivant à adapter la théorie exposée au premier chapitre au problème posé par ce terme à longue période. Cette adaptation sera d'ailleurs valable pour tout autre cas, où se présenterait un terme important à très longue période, quelle que soit son origine.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES DE LA QUASI-COMMENSURABILITÉ DES ARGUMENTS.

16. Impossibilité d'une théorie générale à quatre arguments.

— Parmi les termes principaux retenus, de nombreux ont des arguments qui diffèrent de $D + l' - l$. Ainsi, par exemple,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2D + l' + \lambda l \\ D \quad \quad + (\lambda + 1) l \\ \quad \quad - l' + (\lambda + 2) l \end{array} \right.$$

ou

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda l \\ D + l' + (\lambda - 1) l \\ 2D + 2l' + (\lambda - 2) l, \end{array} \right.$$

où λ est un nombre entier quelconque. Ils ont des périodes très voisines, avec des déphasages de 10,5 pour tout l'intervalle d'intégration. Si l'on déterminait tous les termes à la fois par une méthode de moindres carrés, nous avons vu au paragraphe 3 que le déterminant principal du système linéaire des équations normales serait très voisin de 0. Le fait de se servir de la méthode simplifiée décrite au paragraphe 5 ne fait pas disparaître l'indétermination qui est inhérente au problème.

Donc, si nous appliquons cette méthode, les termes (22) qui en principe devraient apparaître dans les coefficients des groupes $2D + l'$, D et l' , ne seront pas séparés.

A titre d'exemple, nous avons essayé de calculer les coefficients $C_{hij}(30^\circ)$ et $S_{hij}(30^\circ)$ avec les combinaisons indiquées par des astérisques dans le paragraphe 15 dans le développement de $\frac{1}{\mu}$. Ainsi on a trouvé

$$C_{000}(30^\circ) = +11,715, \quad C_{110}(30^\circ) = +3,919 \quad \text{et} \quad S_{110}(30^\circ) = +2,177.$$

La valeur des deux derniers termes est beaucoup trop grande. En effet, l'étude des développements de Delaunay fait prévoir pour les termes en $D + l'$ du développement de $\frac{1}{r}$, un maximum de 0,05.

D'autre part, $C_{000}(30^\circ)$ peut être représenté en première approximation par la valeur moyenne prise par $\frac{1}{r}$ pour $l = 30^\circ$, soit $a = 0,157$ et $e = 0,39$ environ 8,96 au lieu de 11,715.

Mais si dans l'expression

$$A(30^\circ) = C_{000}(30^\circ) + C_{110}(30^\circ) \cos(D + l') + S_{110}(30^\circ) \sin(D + l'),$$

on remplace aussi $D + l'$ par

$$\varpi - \varpi' + l = \varpi - \varpi' + 30^\circ = 161^\circ$$

(en négligeant la variation que peut subir ϖ), on trouve

$$A(30^\circ) = 8,72.$$

On trouve, de même, $A(-30^\circ) = 8,83$. Ces valeurs, cette fois, sont raisonnablement proches de la valeur moyenne de $\frac{1}{r}$. Ceci prouve donc qu'effectivement les termes de période voisine n'ont pas été convenablement séparés.

En conclusion, si l'on se refuse d'augmenter l'intervalle d'intégration jusqu'à le rendre supérieur à la période de $D + l' - l$, il est impossible de mener l'analyse harmonique suivant les règles énoncées au premier chapitre.

17. Théorie du type planétaire. — Nous pouvons remplacer l'un quelconque de quatre arguments indépendants choisis D , l' , F et l par une combinaison linéaire indépendante des trois autres. Remplaçons donc l' par la combinaison

$$D + l' - l = \varpi - \varpi' = P.$$

Les fonctions à analyser prendront la forme suivante pour une fonction en cosinus

$$F(t) = \sum_{h,i,j,k} A_{hijk} \cos(hD + iP + jF + kl).$$

Or P est une fonction linéaire de très longue période du temps

$$P = n_p(t - t_0) + P_0.$$

D'après le paragraphe 15, pour le VIII^e satellite, nous aurions,

$$n_p = -0,000\,037\,81 \quad \text{et} \quad P_0 = 131,089.$$

On peut écrire

$$F(t) = \sum_{h,i,j,k} \Lambda_{hijk} \cos(hD + iP_0 + jF + kl) \cos in_p(t - t_0) \\ - \sum_{h,i,j,k} \Lambda_{hijk} \sin(hD + iP_0 + jF + kl) \sin in_p(t - t_0),$$

$n_p(t - t_0)$ étant un angle petit pour un intervalle de temps très supérieur à l'intervalle d'intégration, on peut développer en série entière de $n_p(t - t_0)$

$$F(t) = \sum_{h,i,j,k} (\Lambda_{hijk} \cos iP_0) \cos(hD + jF + kl) \\ - \sum_{h,i,j,k} (\Lambda_{hijk} \sin iP_0) \sin(hD + jF + kl) \\ + \sum_{h,i,j,k} -in_p(t - t_0) [(\Lambda_{hijk} \sin iP_0) \cos(hD + jF + kl) \\ + (\Lambda_{hijk} \cos iP_0) \sin(hD + jF + kl)] \\ - \sum_{h,i,j,k} \frac{i^2 n_p^2(t - t_0)^2}{2} [(\Lambda_{hijk} \cos iP_0) \cos(hD + jF + kl) \\ - (\Lambda_{hijk} \sin iP_0) \sin(hD + jF + kl)] + \dots,$$

ce qui, après le remplacement de $\sin iP_0$ et $\cos iP_0$ par leur valeur numérique et sommation par rapport aux i , donne avec de nouvelles notations

$$(24) \quad F(t) = \sum_{h,j,k} a_{hjk} \cos(hD + jF + kl) + \sum_{h,j,k} b_{hjk} \sin(hD + jF + kl) \\ + (t - t_0) \left[\sum_{h,j,k} a'_{hjk} \cos(hD + jF + kl) \right. \\ \left. + \sum_{h,j,k} b'_{hjk} \sin(hD + jF + kl) \right] + \dots$$

La forme de la solution est la même dans le cas d'une fonction en sinus. Remarquons, de plus, que dans l'intervalle sur lequel on déterminera ces coefficients, on a $(t - t_0) < 18\,000$ jours, donc $n_p(t - t_0) < 0^{\circ},7$, soit $0,012$ rad et vaut en moyenne $0,006$. La contribution d'un terme de Poisson de la formule (24) sera donc plus faible que le centième de la contribution du terme périodique pur correspondant. Si nous tenons compte du fait que nous ne demandons à l'analyse harmonique qu'une solution approchée que nous améliorons par la suite, nous pouvons

conclure qu'on peut, pour cette approximation, négliger complètement les termes mixtes et rechercher une solution provisoire de la forme

$$(25)_s^1 \quad F(t) = \sum_{h,j,k} a_{hjk} \cos(hD + jF + kl) + \sum_{h,j,k} b_{hjk} \sin(hD + jF + kl).$$

18. Modification de la méthode d'analyse harmonique. — A la différence du cas exposé au paragraphe 5, nous n'avons plus à analyser qu'une fonction dépendant de trois paramètres, mais cette fois il y a à la fois des termes en sinus et des termes en cosinus.

Reprenons le raisonnement du paragraphe 5. L'équation (25) peut s'écrire

$$F(t) = \sum_{h,j} \left[\left(\sum_k a_{hjk} \cos kl \right) \cos(hD + jF) - \left(\sum_k a_{hjk} \sin kl \right) \sin(hD + jF) \right. \\ \left. + \left(\sum_k b_{hjk} \cos kl \right) \sin(hD + jF) + \left(\sum_k b_{hjk} \sin kl \right) \cos(hD + jF) \right].$$

Soient

$$\alpha_{hj}(l) = \sum_k a_{hjk} \cos kl, \quad \beta_{hj}(l) = \sum_k b_{hjk} \cos kl;$$

$$\alpha'_{hj}(l) = \sum_k a_{hjk} \sin kl, \quad \beta'_{hj}(l) = \sum_k b_{hjk} \sin kl;$$

on a

$$F(t) = \sum_{h,l} [\alpha_{hj}(l) + \beta'_{hj}(l)] \cos(hD + jF) \\ + \sum_{h,l} [\beta_{hj}(l) - \alpha'_{hj}(l)] \sin(hD + jF) \\ = \sum_{h,j} C_{hj}(l) \cos(hD + jF) + \sum_{h,j} S_{hj}(l) \sin(hD + jF).$$

Les expressions de $C_{hj}(l)$ et $S_{hj}(l)$ en fonction des α et β montrent qu'il n'y a plus de relation simple de $C_{hj}(l)$ ou $S_{hj}(l)$ avec $C_{hj}(-l)$ et $S_{hj}(-l)$. Nous ne pourrions plus, cette fois, nous servir simultanément des valeurs prises par $F(t)$ pour l_0 et $-l_0$ pour déterminer les coefficients C et S .

Ceci mis à part, le principe général de la méthode décrite au paragraphe 5 reste valable. En donnant successivement à t les P valeurs $t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l}$ donnant à la variable l une valeur fixée à l'avance l_0 , nous obtenons P valeurs de la fonction

$$\Phi_{l_0} \left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l} \right) = F \left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l} \right)$$

et les arguments D et F restant fonction de ce même $t = t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l}$, on obtient le système de P équations suivant :

$$(26) \quad \Phi_{l_0} \left(t_0 + \frac{2\lambda\pi}{n_l} \right) = \sum_{h,j} C_{hj}(l_0) \cos(hD + jF) + \sum_{h,j} S_{hj}(l_0) \sin(hD + jF)$$

dont les inconnues sont $C_{hj}(l_0)$ et $S_{hj}(l_0)$. Ce système étant résolu par les moindres carrés, le nombre N de ces inconnues ne devrait pas dépasser $\frac{2P}{3}$.

En principe, deux inconnues C_{hj} et S_{hj} correspondront à toute combinaison de coefficients h et j susceptible de donner des termes importants non plus, cette fois, dans le système d'arguments D, l' , F, l , précédemment utilisé, mais D, P, F, l où $P = D + l' - l$.

Une fois qu'on a déterminé les C_{hj} et S_{hj} pour un certain nombre n de valeurs de l_0 , utilisant la définition de ces grandeurs en fonction des a_{hjk} et b_{hjk} par l'intermédiaire des α et β , on peut écrire le système d'équations

$$(27) \quad \begin{cases} \sum_k a_{hjk} \cos kl_0 + \sum_k b_{hjk} \sin kl_0 = C_{hj}(l_0), \\ -\sum_k a_{hjk} \sin kl_0 + \sum_k b_{hjk} \cos kl_0 = S_{hj}(l_0) \end{cases}$$

qui permet de déterminer, par les moindres carrés a_{hjk} et b_{hjk} pour toutes les valeurs de k qu'on jugera utiles. Il y aura autant de systèmes de ce type qu'il y aura de combinaisons d'indices h et j .

19. Simplification due au choix des l_0 . — Formons les équations normales d'un système (27) de $2n$ équations que nous écrirons, pour simplifier les notations,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-q}^{+q} a_k \cos kl_i + \sum_{k=-q}^{+q} b_k \sin kl_i &= C(l_i), \\ -\sum_{k=-q}^{+q} a_k \sin kl_i + \sum_{k=-q}^{+q} b_k \cos kl_i &= S(l_i), \end{aligned}$$

et où l_0 prend n valeurs l_i , et k varie entre $-q$ et $+q$. Le système d'équations normales est d'ordre $2q + 1$, car b_0 n'existe pas.

Le terme général de cette matrice a l'une des deux formes suivantes :

$$a, \dots, \sum_i \cos kl_i \cos k'l_i + \sum_i \sin kl_i \sin k'l_i$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & \frac{1}{2} \sum_i [\cos(k - k') l_i + \cos(k + k') l_i] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_i [\cos(k - k') l_i - \cos(k + k') l_i] = \sum_i \cos(k + k') l_i, \\
 b, \dots, & \quad \sum_i \cos k l_i \sin k' l_i - \sum_i \sin k l_i \cos k' l_i
 \end{aligned}$$

qui se met sous une forme analogue, mais avec des sinus.

Si nous choisissons pour l_i des angles en progression arithmétique de la forme $l_i = \frac{\lambda \pi}{n}$, où λ est un nombre entier variant entre 0 et $n - 1$, un résultat classique de trigonométrie est que si k est un

nombre entier, la somme $\sum_{\lambda=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\lambda}{n} \times 2k\pi\right)$ est toujours nulle et la

somme $\sum_{\lambda=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda}{n} \times 2k\pi\right)$ est nulle, sauf si k est un multiple de n et

en ce cas cette somme est n . Appliquons ce résultat aux termes de la matrice des équations normales. Les termes du type b contenant des sommes et des différences de sinus seront toujours nuls. Ceux du type a , d'après la formule (28), peuvent ne pas être nuls. Nous éviterons que $k - k'$ puisse être égal à $\pm n$ et *a fortiori* à un multiple de n en choisissant $n > 2q$. Il ne restera que le cas $k' = k$. Ce sont les termes de la diagonale principale qui valent donc n .

Donc la matrice des équations normales du système (27) est la matrice unité multipliée par n , à condition qu'on ait $n > 2q$ et que les l_i soient choisis comme ci-dessus. On peut donc résoudre ces équations et l'on aura

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{n} \sum_i [C(l_i) \cos k l_i - S(l_i) \sin k l_i], \\ b_k &= \frac{1}{n} \sum_i [C(l_i) \sin k l_i + S(l_i) \cos k l_i]. \end{aligned} \right.$$

20. Cas des arguments indépendants de P. — Nous avons vu que pour chaque combinaison des coefficients h et j , nous devons introduire dans l'analyse deux inconnues $C_{hj}(l_0)$ et $S_{hj}(l_0)$. Il est possible, dans certains cas, de n'en calculer qu'une, ce qui permet d'augmenter le nombre de combinaisons retenues. Soit une combinaison de coefficients h et j tels que, si la combinaison $hD + jF$ donne des termes qu'on désire conserver, les combinaisons $hD + iP + jF$, où i n'est pas nul, donnent toutes des termes négligeables.

De tels termes auront la forme $\sum_k a_{hjk} \cos(hD + jF + kl)$. Ils sont représentés aussi par la formule (25) avec b_{hjk} nul. Les formules (27) restent valables, mais avec deux fois moins d'inconnues. On aura donc la même précision si l'on ne conserve que la moitié des équations, en supprimant par exemple $S_{hj}(l_0)$, d'autant mieux que, avec les hypothèses ci-dessus, on peut prévoir que les coefficients a_{hjk} seront petits. Il faut cependant remarquer qu'il y aura confusion entre a_{hjk} et a_{hj-k} . On ne fera cette simplification que si l'on peut prévoir que les termes significatifs du groupe auront tous le même signe pour k .

Ces résultats seront les mêmes, après changement de cosinus en sinus pour les fonctions en sinus.

CHAPITRE IV.

THÉORIE APPROCHÉE DU VIII^e SATELLITE DE JUPITER.

Nous allons maintenant appliquer au VIII^e satellite de Jupiter la modification exposée au chapitre précédent en reprenant le travail au stade où il a été laissé à la fin du chapitre II.

21. Amélioration de l'argument l . — Nous appliquons à cet effet la méthode exposée au e du paragraphe 6. Nous ne conservons pour cette partie, en plus du terme constant, que trois combinaisons d'arguments F et D que la théorie de Brown [6] prévoit comme devant être les plus importantes : $2F$, $2D$ et $2F - 2D$. L'argument l' étant absent, la théorie du paragraphe 6 reste valable. Les équations (14) ont sept inconnues. La fonction à analyser choisie a été $\frac{1}{r}$ et deux analyses séparées ont été faites, l'une (A) pour les 24 premières valeurs de $\Phi(t)$ représentant les 50 premières années de l'intervalle d'intégration, l'autre (B) pour les 24 dernières valeurs de $\Phi(t)$. On a calculé C_{hoj} et S_{hoj} pour $l_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ et 150° , ainsi que les résidus. Les résultats sont donnés dans le tableau IV.

Les Δl sont donnés par la formule

$$\Delta l = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae \sin \varphi} \Delta r,$$

où l'on a pris $a = 0,157$ et $e = 0,4$.

Les résidus pour des l_0 négatifs sont opposés à ceux de ce tableau et donneraient les mêmes résultats.

On obtient en moyenne

$$\overline{\Delta l}_{(A)} = + 0^\circ 543 \quad \text{et} \quad \Delta l_{(B)} = + 0^\circ 833,$$

ce qui conduit à une correction de l de $+0,688$ et de n ;

$$\Delta n = \frac{\overline{\Delta l}_{(B)} - \overline{\Delta l}_{(A)}}{50 \times 365} = +0,000\,015\,88 \quad \text{par jour.}$$

On applique ceci à la valeur initiale de cet argument donné au paragraphe 14.

En adoptant, de plus, pour ϖ' la valeur $+44^{\circ},268$, tirée du même paragraphe et en négligeant donc la partie variable, on définit

$$D = l - l' + \varpi - \varpi'$$

et l'on obtient les arguments fondamentaux suivants :

$$(30) \quad \begin{cases} l = -0^{\circ},484\,207\,38 (t - t_0) - 262^{\circ},581, \\ D = -0,567\,298\,60 (t - t_0) + 265,019, \\ F = -0,496\,417\,02 (t - t_0) + 198,710. \end{cases}$$

TABLEAU IV.

Détermination des Δl .

t_0 (°).	Σ résidus		$\frac{1}{r}$ moyen (terme constant).	$\sin v$ ($e = 0,4$).	Δr (A) (10^{-3}).	Δr (B) (10^{-3}).	Δl (A). (rad).	Δl (B) (rad).
	(A).	(B).						
30...	-1 363	-1 734	8,74	0,919	0,74	0,94	0,0118	0,0150
60...	- 603	-1 148	6,68	0,957	0,56	1,07	0,0085	0,0163
90...	- 288	- 600	5,55	0,745	0,39	0,81	0,0076	0,0158
120...	- 166	- 297	4,95	0,495	0,284	0,506	0,0084	0,0149
130...	- 86	- 123	4,66	0,246	0,165	0,234	0,0098	0,0139

22. Amélioration des arguments fondamentaux et recherche de termes nouveaux. — Remarquons d'abord qu'une erreur constante sur un argument n'est pas décelable. En effet, d'après la forme même du développement désiré, tout ensemble de termes

$$A \cos(\theta + \Delta\theta) + B \sin(\theta + \Delta\theta)$$

peut s'écrire

$$(A \cos \Delta\theta + B \sin \Delta\theta) \cos \theta + (B \cos \Delta\theta - A \sin \Delta\theta) \sin \theta$$

et prend donc la même forme si $\Delta\theta$ est une constante. Comme la partie variable de D dépend uniquement de celle de l (celle de l' étant une donnée du problème), les seules améliorations indépendantes que nous pouvons espérer faire sont celles de n_r et de n .

Pour faire cette étude, à part le terme constant, les 11 combinaisons

suivantes d'arguments ont été retenues :

$2F$	$2D - 2F$	$4D$	$3D$
$4F$	$2D + 2F$	D	$3D - 2F$
$2D$	$2D - 4F$	$D - 2F$	

Ils suffisent à représenter tous les termes retenus au paragraphe 15. Le système (26) est un système de 48 équations à 23 inconnues, que nous formons et résolvons par les moindres carrés pour $l_0 = +30^\circ$ et $l_0 = -30^\circ$ à partir des arguments fondamentaux (30) et de deux autres séries d'arguments fondamentaux dérivés des précédents en appliquant successivement une variation de $0,00002$ par jour sur $n_F (\Delta F)$ et $n_l (\Delta l)$. Nous calculons ensuite les résidus pour chaque équation. Le résidu quadratique moyen sur $\frac{1}{r}$ pour le premier de ces systèmes d'équations est $0,116$, soit avec $\bar{r} = 0,115$ et une distance géocentrique de 5 U. A., un écart quadratique moyen de $60''$ en α et δ .

On a pris la somme des résidus et la somme des corrections amenées par les variations de n_F et n_l par périodes de 12 révolutions.

On a essayé de représenter les résidus par une fonction linéaire des variations en n_F et n_l et la solution par les moindres carrés a donné

$$(31) \quad \begin{cases} \Delta n_l = + 0,000\,012\,10 & \text{par jour,} \\ \Delta n_F = + 0,000\,006\,49 & \text{par jour.} \end{cases}$$

De plus, on a essayé d'analyser les résidus en fonction d'autres combinaisons d'arguments. Nous avons essayé les termes suivants :

$\cos 6F$	$\cos(4D + 2F)$	$\cos(D + 2F)$
$\cos(2D + 4F)$	$\cos(4D - 4F)$	$\sin(D + 2F)$
$\sin(2D + 4F)$	$\cos 6D$	$\cos(3D + 2F)$
$\cos(4D - 2F)$	$\sin 6D$	$\sin(3D + 2F)$

Les coefficients pour $\cos(4D \pm 2F)$, $\cos 6D$, $\sin(D + 2F)$ étaient supérieurs à 10^{-3} et étaient donc susceptibles d'influer sur les résidus. L'influence des termes avec coefficients impairs de D est plus importante que dans les théories classiques, car ils englobent aussi les termes contenant l' . On a donc décidé de conserver pour l'analyse suivante les nouveaux termes en $3D$, même si les coefficients obtenus étaient petits. En définitive, on a ainsi sélectionné les combinaisons suivantes d'arguments :

a. Arguments pour lesquels on détermine le terme en cosinus et le terme en sinus

$2F$	$D + 2F$	$2D + 2F$
$4F$	$2D$	$3D$
D	$2D - 2F$	$4D$
$D - 2F$		

b. Arguments pour lesquels on ne détermine que le terme en cosinus (ou en sinus pour les fonctions en sinus) comme il a été indiqué au paragraphe 20

$$\begin{array}{ccc} 6F & 2D - 4F & 3D + 2F \\ D - 4F & 2D + 4F & 4D - 2F \\ D + 4F & 3D - 2F & 4D + 2F \\ & & 6D \end{array}$$

c. Terme constant.

23. **Détermination définitive des arguments et choix définitif des termes.** — Nous faisons de nouveau l'étude précédente, mais en prenant cette fois tous les termes sélectionnés ci-dessus et en corrigeant les arguments (30) par (31). Le résidu quadratique moyen sur $\frac{1}{r}$ est cette fois 0,028, soit un écart quadratique moyen de 15" en α et δ .

Par la même méthode que précédemment, on a trouvé les corrections suivantes aux arguments fondamentaux :

$$\begin{aligned} \Delta n_l &= + 0,000\ 003\ 72 \quad \text{par jour,} \\ \Delta n_F &= - 0,000\ 003\ 38 \quad \text{par jour.} \end{aligned}$$

Les arguments principaux ainsi établis sont

$$(32) \quad \begin{cases} l = - 0,484\ 191\ 56 (t - t_0) - 262,581, \\ D = - 0,567\ 282\ 78 (t - t_0) + 265,019, \\ F = - 0,496\ 413\ 91 (t - t_0) + 198,710. \end{cases}$$

Nous avons encore décidé de remplacer le terme en $\sin 4F$ par le terme en $\sin (3D - 2F)$. En effet, nous ne pouvons avoir dans le groupe *b* que des arguments tels que le signe du coefficient de *l* soit déterminé (§ 20). Or le terme prédominant d'un groupe $hD + jF$ est $hD + jF - (h + j)l$ et les autres termes importants sont les termes voisins. Il faut donc éviter de placer dans cette catégorie les groupes pour lesquels $h + j$ vaut 1.

Ces changements étant effectués nous avons de nouveau fait le même calcul jusqu'aux résidus pour $l = 30^\circ$ et aussi $l = 120^\circ$. De plus, nous avons donné un poids double aux 50 années centrales de l'intervalle d'intégration, afin de diminuer l'influence des erreurs cumulatives de l'intégration. Cette fois, nous avons obtenu, pour ces 50 années, un écart quadratique moyen en α et δ de 10" pour $l = 30^\circ$ et 5" pour $l = 120^\circ$.

On peut donc affirmer, qu'en moyenne, les résidus sont comparables aux résidus de l'intégration numérique pour les huit années du raccordement (voir § 11). Toute amélioration de ce résultat serait donc illusoire. Aussi avons-nous considéré comme définitives, les valeurs (32) des

arguments principaux ainsi que ce dernier choix de combinaisons des coefficients h et j .

24. Analyse harmonique des éléments. — Les fonctions à analyser sont :

— Les éléments : $a, e, i, \Omega - \bar{\Omega}, \omega - \bar{\omega}$ et $M - l$;

— Les dérivées des éléments :

$$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{dM}{dt};$$

— Les fonctions suivantes des éléments :

$$\sqrt{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{\sin i},$$

dont un développement approché sera utile dans la dernière phase du travail. Ces fonctions se divisent en deux groupes :

Type 1. Fonctions en cosinus :

$$a, e, i, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{dM}{dt}, \sqrt{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{\sin i}.$$

Les termes conservés sont ceux utilisés dans le paragraphe précédent.

Le système d'équations (26) aura pour inconnues :

$$a. C_{0,2}; S_{0,2}; C_{1,0}; S_{1,0}; C_{1,-2}; S_{1,-2}; C_{1,2}; S_{1,2};$$

$$C_{2,0}; S_{2,0}; C_{2,-2}; S_{2,-2}; C_{2,2}; S_{2,2}; C_{3,0}; S_{3,0};$$

$$C_{3,-2}; S_{3,-2}; C_{4,0}; S_{4,0}.$$

$$b. C_{0,4}; C_{0,6}; C_{1,-4}; C_{1,4}; C_{2,-4}; C_{2,4}; C_{3,2}; C_{4,-2}; C_{4,2}; C_{6,0}.$$

$$c. C_{0,0}.$$

Type 2. Fonctions en sinus :

$$\Omega - \bar{\Omega}, \omega - \bar{\omega}, M - l, \frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}.$$

Le système (26) aura pour inconnues, les inconnues des groupes a et c ci-dessus, ainsi que

$$S_{0,4}; S_{0,6}; S_{1,-4}; S_{1,4}; S_{2,-4}; S_{2,4}; S_{3,2}; S_{4,-2}; S_{4,2}; S_{6,0}.$$

Les angles l_0 seront pris de 15° en 15° entre 0 et 345° , de façon à satisfaire aux conditions du paragraphe 19. Nous avons donc à résoudre 24 systèmes de 48 équations à 31 inconnues avec 10 seconds membres différents pour le type 1 et 24 systèmes de 48 équations à 31 inconnues avec 6 seconds membres différents pour le type 2. Les seconds membres ont été obtenus par la formule d'interpolation de Lagrange au 4^e ordre pour toutes les

valeurs du temps donnant à l (32) les valeurs ci-dessus. Les coefficients des premiers membres ont été calculés à l'aide des valeurs définitives des arguments principaux (32). La formation des équations normales et leur résolution ont été faites sur I. B. M. 704. Les inversions de matrice ont été effectuées par une méthode d'itération garantissant cinq chiffres significatifs aux résultats. Il n'a jamais fallu plus de trois itérations pour y parvenir.

Les solutions de ces systèmes sont alors regroupés et les a_{hjk} et b_{hjk} définitifs, calculés à l'aide des expressions (29). En ce qui concerne les arguments du type b , on a donné à k des valeurs positives pour les seules combinaisons (1, — 4) et (2, — 4) de h et j . Pour les autres combinaisons de h et j , ce sont des valeurs négatives de k qui ont été conservées. Les séries représentant les éléments ainsi obtenues sont partiellement données dans les tableaux X à XIII dans le chapitre V. Le nombre et la précision des termes de ces séries sont donnés par le tableau V.

TABLEAU V.

Importance des séries représentant les éléments.

Un terme comprend les coefficients de cos et de sin.

Éléments.	Nombre de termes.	Limite inférieure des termes conservés.
a	120	$1 \cdot 10^{-5}$
e	122	10
i	116	8
Ω	135	15
ω	164	25
M	150	30

25. Coordonnées rectangulaires du satellite. — Ces séries constituent une orbite intermédiaire que nous étudierons dans le chapitre V. Cependant, la précision de cette orbite ne peut être étudiée aisément qu'à l'aide des coordonnées rectangulaires. Nous avons donc calculé ceux-ci à partir des séries représentant les éléments. Les résultats sont donnés dans les tableaux VI et VII. On a conservé tous les termes supérieurs à 10^{-4} U. A., soit environ $4''$ en α ou δ .

Pour obtenir ces coordonnées, nous avons d'abord calculé $\frac{r'}{a}$, $\sin v$ et $\cos v$ à l'aide de leurs développements en fonction des multiples de M . On peut trouver ces formules, par exemple dans un travail récent de

TABLEAU VI.

Séries x et y (première approximation).

Unités : 10^5 U. A.

Coefficient de			x .		y .	
D.	F.	L .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
0	0	0	-- 6 342	-- 1 679	+ 6 193	+ 1 719
0	0	+ 1	+ 9 992	-- 8 776	+ 9 771	+ 8 992
0	0	+ 2	+ 1 954	-- 1 679	+ 1 906	+ 1 720
0	0	+ 3	+ 528	+ 496	+ 523	+ 511
0	0	+ 4	+ 160	-- 135	+ 161	+ 135
0	0	+ 5	+ 84	-- 52	+ 83	+ 54
0	0	+ 6	+ 17	-- 23	+ 15	+ 17
0	0	+ 7	+ 21	-- 3	+ 7	+ 21
0	0	+ 8	-- 75	-- 40	-- 18	-- 21
0	+ 2	-- 5	-- 67	-- 59	+ 70	+ 59
0	+ 2	-- 4	-- 19	+ 22	-- 7	-- 30
0	+ 2	-- 3	+ 68	+ 26	-- 62	-- 23
0	+ 2	-- 2	+ 1 291	+ 644	-- 1 209	-- 723
0	+ 2	-- 1	+ 644	+ 410	-- 633	-- 418
0	+ 2	0	-- 249	+ 478	-- 249	-- 478
0	+ 2	+ 1	-- 155	+ 182	-- 164	-- 176
0	+ 2	+ 2	-- 88	+ 107	-- 93	-- 107
0	+ 2	+ 3	-- 47	+ 52	-- 54	-- 50
0	+ 2	+ 4	+ 3	+ 10	0	-- 12
0	+ 2	+ 6	+ 6	+ 15	-- 6	-- 11
0	+ 2	+ 8	+ 11	-- 5	+ 12	+ 1
0	+ 4	-- 6	-- 25	-- 11	+ 18	+ 1
0	+ 4	-- 5	+ 57	+ 18	-- 42	-- 18
0	+ 4	-- 4	-- 20	-- 22	+ 13	+ 11
0	+ 4	-- 3	-- 18	-- 16	+ 16	+ 25
0	+ 4	-- 2	-- 21	-- 19	+ 29	+ 22
0	+ 4	-- 1	+ 22	-- 23	+ 19	+ 22
0	+ 4	0	+ 5	-- 35	+ 12	+ 25
0	+ 6	-- 6	-- 5	+ 11	-- 12	-- 10
0	+ 6	-- 4	+ 7	-- 17	+ 6	+ 18

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			x .		y .	
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
0	+ 6	— 3	+ 4	+ 11	— 4	— 15
1	— 6	— 2	— 16	— 7	— 13	— 1
+ 1	— 6	— 1	+ 10	+ 1	— 2	0
+ 1	— 6	+ 2	— 10	— 5	— 4	— 10
1	— 4	— 5	— 7	+ 1	+ 17	+ 3
+ 1	— 4	— 4	+ 13	+ 5	— 17	— 3
+ 1	— 4	— 3	+ 4	— 24	— 23	— 28
+ 1	— 4	— 2	+ 13	+ 7	— 11	— 1
+ 1	— 4	0	+ 6	+ 14	+ 3	+ 8
+ 1	— 4	+ 1	+ 10	+ 1	+ 4	+ 5
1	— 4	+ 2	+ 14	+ 4	— 21	— 2
1	— 4	+ 3	+ 2	— 18	— 4	— 4
+ 1	— 2	— 6	— 9	+ 6	+ 10	+ 11
+ 1	— 2	— 3	— 10	— 2	— 6	— 2
+ 1	— 2	— 2	— 8	+ 13	+ 23	+ 13
+ 1	— 2	— 1	+ 30	+ 15	— 12	— 11
+ 1	— 2	0	+ 20	+ 1	— 25	— 22
+ 1	— 2	+ 1	— 28	— 13	— 14	— 37
+ 1	— 2	+ 2	— 16	— 15	— 3	— 18
+ 1	— 2	+ 3	— 10	+ 28	— 23	— 12
+ 1	0	— 5	— 14	— 2	— 4	— 6
+ 1	0	— 4	— 12	+ 8	+ 12	+ 12
+ 1	0	— 3	— 24	+ 21	+ 23	+ 47
+ 1	0	— 2	— 60	+ 58	+ 54	+ 51
+ 1	0	— 1	+ 2	+ 62	— 75	— 29
+ 1	0	0	— 15	— 110	— 60	— 15
+ 1	0	+ 1	— 18	— 29	+ 27	+ 23
+ 1	0	+ 2	— 23	— 5	— 18	— 27
+ 1	+ 2	— 5	+ 11	+ 1	+ 22	+ 18
+ 1	+ 2	— 4	— 4	— 7	— 1	— 12
+ 1	+ 2	— 3	— 6	+ 32	+ 18	+ 31
+ 1	+ 2	— 2	— 8	+ 20	+ 4	+ 6
+ 1	+ 2	— 1	0	— 30	— 21	— 8
+ 1	+ 2	0	— 1	+ 9	+ 17	+ 3
+ 1	+ 4	— 6	— 49	— 25	— 53	— 12

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			x .		y .	
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 1	+ 4	— 4	— 19	— 6	— 10	— 14
+ 1	+ 4	— 3	+ 8	— 13	— 2	— 13
+ 1	+ 6	— 8	— 5	— 10	— 2	— 9
+ 1	+ 6	— 4	+ 11	+ 4	+ 3	+ 5
+ 2	— 6	— 1	— 20	+ 1	+ 19	+ 2
+ 2	— 6	0	+ 10	— 2	+ 11	+ 3
+ 2	— 6	+ 2	— 4	— 10	+ 5	+ 13
+ 2	— 6	+ 3	+ 8	— 1	— 11	— 1
+ 2	— 4	— 8	+ 13	+ 13	— 13	— 11
+ 2	— 4	— 4	— 11	+ 7	— 7	— 8
+ 2	— 4	— 3	— 41	+ 4	— 43	— 4
— 2	— 4	— 2	+ 7	— 14	+ 8	+ 21
+ 2	— 4	— 1	— 46	+ 32	— 40	— 27
+ 2	— 4	+ 1	+ 35	0	+ 27	+ 2
+ 2	— 4	+ 2	— 56	+ 12	— 50	— 18
+ 2	— 4	+ 4	+ 32	— 21	+ 27	+ 25
+ 2	— 4	+ 5	— 11	+ 9	— 9	— 13
+ 2	— 4	+ 6	+ 11	— 9	+ 11	+ 9
+ 2	— 2	— 7	— 14	— 13	+ 16	+ 15
+ 2	— 2	— 4	— 37	— 39	+ 32	+ 39
+ 2	— 2	— 3	+ 41	+ 36	— 34	— 46
+ 2	— 2	— 2	+ 42	+ 10	— 52	— 5
+ 2	— 2	— 1	+ 2	+ 11	— 4	— 11
+ 2	— 2	0	— 220	— 179	+ 224	+ 168
+ 2	— 2	+ 1	— 88	+ 39	— 78	— 48
+ 2	— 2	+ 2	+ 48	— 14	+ 41	+ 16
+ 2	— 2	+ 3	+ 31	— 15	+ 29	+ 23
+ 2	— 2	+ 4	+ 38	— 8	+ 33	+ 10
+ 2	— 2	+ 8	+ 12	— 18	+ 10	+ 17
+ 2	0	— 8	+ 13	+ 7	— 15	— 8
+ 2	0	— 7	+ 21	+ 17	— 17	— 20
+ 2	0	— 6	+ 22	+ 32	— 24	— 33
+ 2	0	— 5	+ 43	+ 51	— 45	— 49
+ 2	0	— 4	+ 281	+ 264	— 274	— 261
+ 2	0	— 3	+ 560	+ 475	— 558	— 466

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			α .		β .	
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
- 2	0	— 2	÷ 803	÷ 961	— 823	-- 955
÷ 2	0	— 1	-- 675	-- 346	÷ 681	÷ 331
- 2	0	0	-- 120	÷ 301	— 93	— 317
- 2	0	÷ 1	— 340	÷ 247	— 332	— 257
÷ 2	0	÷ 2	-- 159	÷ 136	— 150	— 143
- 2	0	÷ 3	-- 49	÷ 57	— 52	— 55
- 2	0	÷ 4	-- 5	÷ 5	-- 4	— 11
- 2	0	÷ 6	-- 5	÷ 14	— 7	— 13
- 2	0	÷ 7	-- 15	÷ 5	-- 15	— 5
÷ 2	÷ 2	— 7	— 13	-- 22	÷ 13	÷ 25
÷ 2	÷ 2	— 6	— 34	-- 12	÷ 27	÷ 13
÷ 2	÷ 2	— 5	-- 5	— 30	÷ 8	÷ 36
÷ 2	÷ 2	— 4	— 21	-- 26	÷ 25	÷ 23
÷ 2	÷ 2	— 3	÷ 11	-- 30	÷ 23	÷ 27
÷ 2	÷ 2	— 2	-- 7	— 12	÷ 18	÷ 16
÷ 2	÷ 2	— 1	÷ 87	-- 67	÷ 84	÷ 63
÷ 2	-- 2	0	÷ 24	-- 54	÷ 23	÷ 52
÷ 2	÷ 2	÷ 1	÷ 6	-- 26	÷ 5	÷ 27
÷ 2	-- 2	— 2	-- 6	-- 7	÷ 11	÷ 11
-- 2	÷ 2	÷ 3	-- 40	-- 5	-- 44	— 1
÷ 2	-- 2	÷ 4	÷ 14	-- 1	-- 18	÷ 1
÷ 2	-- 2	÷ 5	÷ 21	-- 14	÷ 19	÷ 14
-- 2	-- 2	÷ 6	-- 10	÷ 9	-- 9	-- 9
- 2	-- 4	-- 8	-- 21	-- 14	÷ 21	÷ 14
- 2	÷ 4	-- 7	÷ 11	— 4	— 19	0
- 2	÷ 4	-- 6	-- 22	÷ 3	-- 27	— 5
-- 2	÷ 4	-- 5	÷ 10	-- 7	÷ 4	÷ 7
-- 2	-- 4	-- 3	— 1	÷ 21	— 1	— 18
-- 2	-- 4	-- 2	÷ 18	-- 4	-- 16	— 2
÷ 2	-- 4	— 1	-- 13	÷ 12	— 18	-- 11
- 2	-- 4	0	÷ 29	-- 4	÷ 27	÷ 6
- 2	÷ 4	÷ 1	÷ 24	÷ 2	-- 27	-- 5
- 2	÷ 4	-- 2	÷ 42	÷ 1	-- 40	— 1
-- 2	÷ 4	÷ 3	÷ 11	÷ 3	-- 13	-- 6
- 2	-- 6	-- 8	— 11	— 7	÷ 6	÷ 11

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			x .		y .		
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 2	+ 6	— 7	+ 16	+ 6	— 5	— 15	
+ 2	+ 6	— 5	— 12	+ 5	— 17	— 3	
+ 3	— 4	— 4	— 5	— 2	+ 1	+ 12	
+ 3	— 4	— 1	— 10	— 9	— 7	— 8	
+ 3	— 4	0	— 2	— 1	+ 2	+ 10	
+ 3	— 2	— 6	+ 8	+ 12	— 3	— 3	
+ 3	— 2	— 5	+ 8	— 6	— 7	— 16	
+ 3	— 2	— 4	+ 1	+ 8	+ 8	+ 11	
+ 3	— 2	— 3	+ 4	+ 11	+ 7	+ 5	
+ 3	— 2	— 1	+ 17	+ 13	— 13	— 1	
+ 3	— 2	0	— 5	— 26	— 24	— 12	
+ 3	— 2	+ 1	— 7	+ 14	+ 12	+ 6	
+ 3	0	— 8	— 15	— 1	+ 2	+ 14	
+ 3	0	— 6	— 10	+ 10	+ 10	+ 10	
+ 3	0	— 5	— 50	+ 16	+ 4	+ 63	
+ 3	0	— 4	— 81	+ 19	+ 25	+ 64	
+ 3	0	— 3	— 86	— 1	+ 44	+ 77	
+ 3	0	— 2	+ 44	— 26	— 6	— 41	
+ 3	0	— 1	— 4	— 50	— 52	— 21	
+ 3	0	0	0	+ 3	+ 11	+ 3	
+ 3	0	+ 1	— 6	— 12	— 12	— 5	
+ 3	+ 2	— 6	— 26	— 20	— 28	— 15	
+ 3	+ 2	— 5	+ 5	— 7	— 11	— 10	
+ 3	+ 2	— 4	+ 9	— 2	— 1	— 16	
+ 3	+ 2	0	0	— 1	— 1	— 10	
+ 3	+ 2	+ 4	— 7	— 10	— 10	— 7	
+ 3	+ 4	— 8	+ 9	— 10	— 13	— 15	
+ 3	+ 4	— 7	+ 14	— 5	— 7	— 10	
+ 3	+ 4	— 6	0	+ 6	+ 5	+ 11	
+ 3	+ 4	— 5	+ 6	+ 14	+ 17	+ 4	
+ 4	— 6	— 1	+ 9	— 11	+ 7	+ 11	
+ 4	— 4	— 5	+ 8	+ 10	— 13	— 12	
+ 4	— 4	— 3	+ 14	+ 8	— 12	— 8	
+ 4	— 4	— 2	— 13	— 9	+ 14	+ 7	
+ 4	— 4	+ 1	— 13	+ 10	— 8	— 9	

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			x .		y .	
D.	F.	L .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 4	— 4	+ 2	+ 20	— 8	+ 19	+ 6
+ 4	— 2	— 5	— 8	— 15	+ 11	+ 8
— 4	— 2	— 4	+ 22	+ 29	— 29	— 27
+ 4	— 2	— 3	+ 12	— 22	+ 5	+ 31
+ 4	— 2	— 2	— 21	0	— 17	— 16
+ 4	— 2	— 1	— 13	+ 12	— 10	— 7
+ 4	— 2	0	+ 38	+ 15	— 46	— 15
+ 4	— 2	+ 1	+ 36	— 28	+ 32	+ 36
+ 4	— 2	+ 2	— 23	+ 20	— 22	— 21
+ 4	— 2	+ 7	— 13	+ 6	— 5	— 6
+ 4	0	— 8	+ 11	+ 7	— 5	— 10
+ 4	0	— 7	— 18	— 22	+ 22	+ 13
+ 4	0	— 6	+ 29	+ 19	— 22	— 33
+ 4	0	— 5	+ 30	+ 5	+ 27	+ 4
+ 4	0	— 4	— 19	— 2	— 26	— 6
+ 4	0	— 3	+ 17	— 11	+ 1	+ 16
+ 4	0	— 2	+ 63	+ 19	— 22	— 13
+ 4	0	— 1	— 38	— 32	+ 83	+ 38
+ 4	0	0	+ 38	— 11	0	+ 16
+ 4	0	+ 1	+ 19	— 19	+ 10	+ 13
+ 4	0	+ 2	+ 19	— 11	+ 14	+ 15
+ 4	0	+ 4	+ 8	— 8	+ 9	+ 11
+ 4	0	+ 5	+ 13	— 13	+ 14	+ 9
+ 4	0	+ 7	— 16	+ 14	— 16	— 14
+ 4	+ 2	— 8	— 22	— 9	+ 28	+ 27
+ 4	+ 2	— 7	+ 12	+ 11	— 10	— 10
+ 4	+ 2	— 6	— 19	— 20	+ 19	+ 20
+ 4	+ 2	— 5	+ 13	— 2	+ 15	+ 1
+ 4	+ 2	— 4	+ 11	— 2	+ 14	+ 10
+ 4	+ 2	— 3	— 26	+ 32	— 25	— 28
+ 4	+ 2	— 2	+ 15	— 22	+ 20	+ 23
+ 4	+ 2	— 1	— 14	+ 9	— 9	— 13
+ 4	+ 2	0	— 10	+ 7	— 7	— 6
+ 4	+ 2	+ 1	+ 9	+ 4	— 10	— 7
+ 4	+ 2	+ 2	— 26	0	— 24	— 4

TABLEAU VI (suite).

Coefficient de			x .		y .		
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 4	+ 2	+ 3	+ 17	+ 14	— 18	— 10	
+ 4	+ 2	+ 4	+ 53	+ 8	— 51	— 8	
+ 4	+ 2	+ 5	+ 16	— 31	+ 17	+ 31	
+ 4	+ 4	— 8	— 4	— 13	+ 3	+ 11	
+ 4	+ 4	— 7	+ 13	+ 14	— 13	— 12	
+ 4	+ 4	— 6	+ 11	— 12	+ 15	+ 11	
+ 4	+ 4	— 5	— 27	+ 20	— 33	— 15	
+ 4	+ 4	— 4	+ 22	— 11	+ 20	+ 11	
+ 4	+ 4	+ 1	+ 14	— 9	+ 14	+ 11	
+ 4	+ 4	+ 3	— 14	+ 24	— 16	— 24	
+ 4	+ 6	+ 1	+ 3	— 10	+ 5	+ 9	
+ 5	— 2	— 5	— 3	+ 2	+ 5	+ 12	
+ 5	— 2	— 4	+ 12	— 8	— 1	— 20	
+ 5	— 2	— 3	— 18	+ 1	+ 12	+ 21	
+ 5	— 2	— 2	— 2	+ 14	+ 13	+ 5	
+ 5	— 2	— 1	— 3	— 11	— 9	— 3	
+ 5	0	— 5	+ 44	— 5	— 26	— 44	
+ 5	0	— 4	— 26	+ 5	+ 16	+ 26	
+ 5	0	— 3	+ 10	+ 3	+ 8	+ 2	
+ 5	0	+ 1	0	+ 5	+ 10	+ 1	
+ 5	+ 2	— 7	+ 17	+ 2	— 5	— 11	
+ 5	+ 2	— 6	— 14	+ 11	+ 2	+ 12	
+ 5	+ 2	— 4	— 6	— 19	— 20	— 5	
+ 5	+ 2	— 3	0	+ 10	+ 10	+ 5	
+ 5	+ 4	— 6	— 5	— 14	— 14	— 6	
+ 6	— 4	— 3	— 13	— 7	+ 14	+ 5	
+ 6	— 4	0	+ 9	— 7	+ 7	+ 10	
+ 6	— 2	— 6	+ 10	+ 12	— 10	— 16	
+ 6	— 2	— 5	— 16	— 14	+ 12	+ 18	
+ 6	— 2	— 4	+ 12	+ 11	— 11	— 20	
+ 6	— 2	— 3	— 2	— 1	+ 3	+ 13	
+ 6	— 2	— 2	— 26	+ 15	— 21	— 24	
+ 6	— 2	— 1	+ 22	— 19	+ 23	+ 21	
+ 6	0	— 8	— 16	— 16	+ 16	+ 13	
+ 6	0	— 7	+ 30	+ 16	— 30	— 15	

TABLEAU VI (*suite et fin*).

Coefficient de			x .		y .		
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 6	0	— 6	— 32	— 15	— 28	+	16
+ 6	0	— 5	— 2	0	— 15	—	5
+ 6	0	— 4	— 5	— 7	— 17	+	6
+ 6	0	— 3	— 8	+ 4	— 5	—	11
+ 6	0	— 2	+ 3	— 13	+ 13	+	12
+ 6	0	+ 3	— 14	+ 11	— 15	—	10
+ 6	0	+ 5	+ 23	— 18	+ 18	+	21
+ 6	0	+ 6	— 12	+ 12	— 12	—	12
+ 6	+ 2	— 8	— 11	— 10	+ 7	+	11
+ 6	+ 2	— 6	— 4	— 10	+ 4	+	15
+ 6	+ 2	— 5	— 20	+ 19	— 23	—	18
+ 6	+ 2	— 4	+ 23	— 25	+ 22	+	23
+ 6	+ 2	— 3	— 10	+ 11	— 12	—	7
+ 6	+ 2	+ 1	+ 15	— 23	+ 13	+	22
+ 6	+ 2	+ 3	— 22	+ 30	— 21	—	28
+ 6	+ 2	+ 4	+ 6	— 13	+ 5	+	13
+ 6	+ 4	+ 1	+ 16	— 19	+ 14	+	20
+ 6	+ 4	+ 2	— 4	+ 12	— 4	—	12
+ 7	0	— 8	— 17	+ 7	+ 5	+	16
+ 7	0	— 4	— 5	— 15	— 15	—	7
+ 8	0	— 4	+ 11	— 11	+ 11	+	11
+ 8	0	+ 3	— 14	+ 10	— 9	—	12
+ 8	0	+ 4	+ 16	— 12	+ 12	+	13
+ 8	+ 2	— 1	— 7	+ 10	— 5	—	12
+ 8	+ 2	+ 1	+ 13	— 12	+ 12	+	14
+ 8	+ 2	+ 2	— 12	+ 13	— 11	—	15
+ 8	+ 4	— 1	— 9	+ 9	— 7	—	11

TABLEAU VII.

*Série z (première approximation).*Unités : 10^{-5} U. A.

Coefficient de			5.	
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin
0	+ 1	— 5	— 1	+ 13
0	+ 1	— 4	+ 6	+ 25
0	+ 1	— 3	+ 6	+ 218
0	+ 1	— 2	+ 29	+ 1 305
0	+ 1	— 1	3	+ 4 785
0	+ 1	0	+ 6	— 7 461
0	+ 1	+ 1	4	— 1 348
0	+ 1	+ 2	0	— 400
0	+ 1	+ 3	0	— 111
0	+ 1	+ 4	+ 1	— 43
0	+ 1	+ 6	— 2	— 15
0	+ 1	+ 7	+ 2	+ 16
0	+ 3	— 6	+ 3	— 15
0	+ 3	— 4	— 7	— 48
0	+ 3	— 3	+ 15	— 179
0	+ 3	— 2	— 3	+ 190
0	+ 3	— 1	+ 7	+ 337
0	+ 3	0	+ 3	+ 156
0	+ 3	+ 1	+ 2	+ 98
0	+ 3	+ 2	+ 2	+ 22
0	+ 3	+ 5	+ 2	+ 11
0	+ 5	— 3	+ 4	— 13
0	+ 5	— 2	— 3	— 22
0	+ 5	0	— 1	— 11
0	+ 7	— 7	+ 1	+ 12
0	+ 7	— 6	— 1	— 12
0	+ 7	— 5	+ 2	— 11
+ 1	— 5	— 3	+ 7	— 11
+ 1	— 3	— 5	+ 13	+ 4
+ 1	— 3	— 4	— 20	+ 4

TABLEAU VII (suite).

Coefficient de			5.	
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 1	— 3	— 3	+ 14	— 4
+ 1	— 3	— 2	+ 12	— 4
+ 1	— 3	0	— 15	+ 13
+ 1	— 3	+ 1	— 13	+ 11
+ 1	— 3	+ 2	+ 28	+ 3
+ 1	— 3	+ 3	— 14	+ 6
+ 1	— 1	— 5	— 16	+ 5
+ 1	— 1	— 3	— 28	— 6
+ 1	— 1	— 2	— 21	— 4
+ 1	— 1	— 1	+ 19	+ 11
+ 1	— 1	+ 1	— 49	+ 33
+ 1	— 1	+ 2	— 1	+ 22
+ 1	— 1	+ 3	— 12	+ 2
+ 1	+ 1	— 6	+ 13	+ 3
+ 1	+ 1	— 5	— 10	+ 2
+ 1	+ 1	— 4	+ 2	— 11
+ 1	+ 1	— 2	— 32	— 5
+ 1	+ 1	— 1	+ 39	— 9
+ 1	+ 1	0	— 27	+ 17
+ 1	+ 1	+ 1	— 26	+ 6
+ 1	+ 3	— 8	— 14	— 3
+ 1	+ 3	— 7	— 17	— 1
+ 1	+ 3	— 6	+ 28	+ 2
+ 1	+ 3	— 3	— 12	+ 1
+ 1	+ 3	— 2	— 13	— 9
+ 1	+ 5	— 4	— 12	— 3
+ 2	— 7	0	0	— 13
+ 2	— 5	— 2	— 2	— 41
+ 2	— 5	— 1	— 3	+ 14
+ 2	— 5	0	+ 1	— 33
+ 2	— 5	+ 2	— 1	+ 23
+ 2	— 3	— 6	+ 1	— 20
+ 2	— 3	— 4	+ 1	— 10
+ 2	— 3	— 3	+ 2	+ 93
+ 2	— 3	— 2	— 5	— 107

TABLEAU VII (suite).

Coefficient de			z.	
D.	F.	l.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 2	-- 3	0	+ 1	+ 31
+ 2	-- 3	+ 1	+ 3	-- 227
+ 2	-- 3	+ 2	-- 6	+ 163
+ 2	-- 3	+ 4	0	+ 11
+ 2	-- 1	-- 6	-- 1	+ 12
+ 2	-- 1	-- 5	-- 6	+ 10
+ 2	-- 1	-- 4	+ 3	+ 30
+ 2	-- 1	-- 3	0	+ 194
+ 2	-- 1	-- 2	0	+ 211
+ 2	-- 1	-- 1	-- 7	+ 706
+ 2	-- 1	0	-- 20	+ 218
+ 2	-- 1	+ 1	-- 6	+ 195
+ 2	-- 1	+ 2	0	+ 23
+ 2	-- 1	+ 3	-- 2	+ 12
+ 2	-- 1	+ 4	0	+ 12
+ 2	+ 1	-- 8	+ 2	+ 12
+ 2	+ 1	-- 5	-- 5	+ 11
+ 2	+ 1	-- 4	+ 6	+ 11
+ 2	+ 1	-- 3	-- 4	+ 160
+ 2	+ 1	-- 2	-- 1	+ 160
+ 2	+ 1	-- 1	-- 3	+ 178
+ 2	+ 1	0	-- 1	+ 235
+ 2	+ 1	+ 1	0	+ 103
+ 2	+ 1	+ 2	+ 2	+ 29
+ 2	+ 1	+ 4	+ 1	-- 13
+ 2	+ 1	+ 5	+ 1	+ 14
+ 2	+ 3	-- 7	-- 2	-- 13
+ 2	+ 3	-- 5	-- 1	-- 19
+ 2	+ 3	-- 4	0	-- 36
+ 2	+ 3	-- 3	+ 3	-- 19
+ 2	+ 3	-- 2	-- 3	-- 61
+ 2	+ 3	-- 1	0	-- 29
+ 2	+ 3	0	0	-- 12
+ 2	+ 3	+ 2	0	+ 22
+ 2	+ 3	+ 4	0	-- 15

TABLEAU VII (suite).

Coefficient de			Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
D.	E	F		
+ 2	5	2	1	14
+ 3	3	3	11	4
- 3	3	- 1	30	19
- 3	3	0	15	13
- 3	- 1	- 6	15	3
+ 3	1	5	16	3
+ 3	1	4	23	19
+ 3	1	- 3	31	0
- 3	1	2	41	6
- 3	- 1	- 1	32	32
- 3	- 1	- 7	16	1
- 3	1	5	1	14
+ 3	1	4	8	19
- 3	1	3	35	25
- 3	- 1	2	72	46
- 3	1	1	17	9
- 3	1	0	15	8
- 3	3	6	18	4
- 3	3	5	24	4
- 4	5	3	1	16
+ 4	5	2	1	17
+ 4	3	3	2	26
+ 4	3	1	2	22
- 4	3	0	4	37
- 4	3	1	0	22
- 4	3	2	0	11
- 4	1	- 6	2	19
+ 4	1	- 5	2	28
- 4	1	4	5	19
- 4	1	3	3	12
- 4	1	2	3	18
+ 4	1	- 1	7	15
- 4	1	0	5	21
+ 4	1	7	0	16
+ 4	1	- 3	5	23

TABLEAU VII (suite).

Coefficient de			Σ.	
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 4	+ 1	— 2	+ 5	— 24
+ 4	+ 1	— 1	— 1	— 13
+ 4	+ 1	+ 1	+ 2	— 11
+ 4	+ 1	+ 3	+ 1	— 19
+ 4	+ 1	+ 5	0	+ 26
+ 4	+ 3	— 5	— 1	— 13
+ 4	+ 3	— 4	+ 2	+ 29
+ 4	+ 3	— 3	— 2	— 23
+ 4	+ 3	+ 1	0	+ 10
+ 4	+ 3	+ 3	0	— 18
+ 4	+ 3	+ 4	0	— 17
+ 4	+ 5	— 6	+ 2	+ 18
+ 4	+ 5	— 5	0	— 14
+ 4	+ 5	+ 2	+ 1	+ 18
+ 5	— 3	— 4	— 10	— 4
+ 5	— 3	— 3	+ 10	+ 6
+ 5	— 3	— 2	— 12	— 8
+ 5	+ 1	— 6	+ 13	+ 10
+ 5	+ 1	— 5	— 17	— 11
+ 5	+ 1	— 4	+ 25	+ 11
+ 5	+ 1	— 3	+ 8	+ 10
+ 5	+ 3	— 5	— 11	— 6
+ 6	— 3	— 4	— 1	— 11
+ 6	— 1	— 7	0	— 10
+ 6	— 1	— 6	0	+ 15
+ 6	— 1	— 5	— 3	— 15
+ 6	— 1	— 3	0	+ 12
+ 6	— 1	— 2	— 2	— 13
+ 6	— 1	— 1	— 9	+ 17
+ 6	— 1	0	+ 8	— 12
+ 6	+ 1	— 7	— 2	— 10
+ 6	+ 1	— 6	— 2	+ 10
+ 6	+ 1	— 5	+ 1	— 10
+ 6	+ 3	— 6	+ 2	+ 14
+ 6	+ 3	— 5	0	— 18

TABLEAU VII (suite et fin).

Coefficient de			Σ .	
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.
+ 6	+ 3	0	0	--- 14
+ 6	+ 3	+ 2	0	+ 20
+ 6	+ 3	+ 3	0	--- 10
+ 6	+ 5	0	0	--- 16
+ 6	+ 5	+ 1	0	+ 10
+ 7	--- 1	--- 7	--- 10	--- 5
+ 8	--- 1	--- 8	0	+ 13
+ 8	+ 3	0	+ 1	--- 11
+ 8	+ 3	+ 1	0	+ 12

Herget dont j'avais eu le manuscrit [29]. Puis, après avoir calculé les lignes trigonométriques de ω , i et r , on obtient

$$x = a \frac{r}{a} [\cos(\omega + v) \cos \Omega - \sin(\omega + v) \sin \Omega \cos i],$$

$$y = a \frac{r}{a} [\cos(\omega + v) \sin \Omega + \sin(\omega + v) \cos \Omega \cos i],$$

$$z = a \frac{r}{a} \sin(\omega + v) \sin i.$$

Les séries intermédiaires étaient calculées avec une approximation telle qu'environ 500 termes étaient conservés. Le programme de multiplication sur I. B. M. 650, prévoit l'accumulation dans les mémoires des termes appartenant aux 30 combinaisons les plus importantes des indices h et j . Les autres termes sont obtenus par sommation des produits intermédiaires perforés sur cartes.

CHAPITRE V.

PRÉCISION DE L'ORBITE INTERMÉDIAIRE.

La signification de l'orbite intermédiaire ainsi obtenue doit être étudiée sous plusieurs aspects. Il faut d'abord connaître la précision de l'ensemble des calculs effectués entre l'intégration numérique et l'obtention des

séries représentant les coordonnées rectangulaires déduites de l'orbite intermédiaire. La partie de l'erreur due à l'analyse harmonique elle-même pourra être évaluée en comparant les séries représentant les éléments et celles obtenues en intégrant par rapport au temps les séries représentant les dérivées de ces éléments. Enfin, il faut encore montrer que ces séries représentent non seulement une solution numérique des équations du mouvement avec une certaine précision, mais aussi la solution formelle. On pourra porter un jugement sur ce point en les comparant avec les séries obtenues après intégration des seconds membres des équations de Lagrange dans lesquels on aurait substitué les séries de la première approximation. Étudions successivement ces trois aspects.

26. Représentation des données par les séries. -- Nous avons déjà vu, au paragraphe 23, que les arguments et les termes retenus pour l'analyse harmonique avaient été choisis de façon que les erreurs introduites dans la première phase de l'analyse de $\frac{1}{r}$ donnent des écarts quadratiques moyens inférieurs à $10''$ en α ou δ . Cependant, l'examen des développements de Delaunay [3] montre que les termes significatifs sont beaucoup plus nombreux dans l'expression de la longitude que dans celle de la parallaxe. Il s'ensuit qu'il faut s'attendre à des écarts plus importants pour les coordonnées que pour le rayon vecteur.

Nous avons fait, pour étudier ces écarts, deux séries de calculs. La précision des calculs effectués entre l'intégration numérique et le calcul des séries représentant les coordonnées est donnée en faisant la somme des séries des tableaux VI et VII et en la comparant aux valeurs de l'intégration numérique. Ce calcul a été fait pour 17 valeurs du temps prises tous les 2 000 jours à partir de J. J. 2 414 000,5. Les écarts quadratiques moyens pour chacune des coordonnées sont respectivement

pour Δx : 0,0032 U. A.,

» Δy : 0,0036 »

» Δz : 0,0024 »

Ceci représente en moyenne, à une distance de 4 U. A. (Terre), un écart quadratique moyen angulaire de $190''$. Ces résidus sont donnés dans le tableau VIII. Les aspects périodiques ou systématiques de certains de ces résidus peuvent faire deviner des termes périodiques. Il est certain que ces résidus doivent pouvoir se mettre sous forme de série de Fourier, mais ces valeurs sont trop éloignées les unes des autres pour qu'on puisse en tirer des conclusions précises.

Il était aussi intéressant de comparer ces séries aux observations elles-mêmes. C'est pourquoi nous en avons fait la somme pour les 11 dates retenues lors de l'intégration numérique (tableau III). A l'aide du

tableau III, nous avons dressé le tableau IX qui donne, en plus des écarts en α et en δ entre l'intégration numérique et la somme des séries VI et VII, les écarts entre ces séries et les observations.

TABLEAU VIII.

Écarts entre la première approximation et l'intégration.

Jour Julien : T. U. 2 400 000,5+.	$X_{\text{sér}} - X_{\text{int}}$ (10^{-4}).	$Y_{\text{sér}} - Y_{\text{int}}$ (10^{-4}).	$Z_{\text{sér}} - Z_{\text{int}}$ (10^{-4}).	Ecart angulaire probable.
14 000.....	— 49	— 26	— 23	215"
16 000.....	+ 27	— 23	+ 4	130
18 000.....	+ 13	+ 49	+ 7	180
20 000.....	— 64	+ 18	+ 23	250
22 000.....	+ 6	+ 47	— 3	170
24 000.....	— 56	+ 7	— 50	270
26 000.....	— 24	— 48	— 17	200
28 000.....	+ 26	+ 35	— 10	120
30 000.....	+ 8	+ 10	— 10	60
32 000.....	— 20	— 66	+ 11	250
34 000.....	0	— 31	+ 53	220
36 000.....	+ 43	+ 29	+ 13	190
38 000.....	— 29	+ 52	— 8	215
40 000.....	— 25	— 31	+ 25	165
42 000.....	— 18	— 29	— 24	150
44 000.....	+ 15	— 2	+ 27	110
46 000.....	+ 11	— 29	+ 6	115

On voit que les écarts dus à l'intégration numérique et ceux dus à l'analyse harmonique ne cumulent pas systématiquement. Les écarts (Int.-Sér.) sont comparables aux écarts (Obs.-Sér.). Leur valeur quadratique moyenne est de 127" en α et 154" en δ . Ils sont tout à fait comparables à ceux du tableau VIII.

En particulier, on peut dire que, pour les 40 années d'observations entre 1908 et 1946 (et, d'après le tableau VIII, vraisemblablement pour les 100 années d'intégration entre 1888 et 1988), les séries VI et VII représentent le mouvement réel avec une erreur quadratique moyenne angulaire de 190", les écarts absolus ne dépassant pas 200" en α et 220" en δ . La meilleure théorie numérique est celle de Brown et Brouwer complétée par Proskourine [23]. L'écart quadratique moyen de la solution publiée (valeurs de $\frac{n'}{n}$, e et i prises chez Brown) est de 28' (24' en α et 15' en δ), les écarts atteignant 45' en α et 30' en δ . Celle,

non publiée en détail, pour laquelle les constantes ont été améliorées, présente encore des écarts atteignant $11'$ en α ou en δ pour la période 1908-1938, et croissant jusqu'à $15'$ pour 1942 et plus encore pour 1946. La comparaison avec les résultats des tableaux VIII et IX est en faveur de ces derniers avec un facteur 5.

TABLEAU IX.

*Écarts en α et δ entre la première approximation
et l'intégration ou les observations.*

Date.	Int.—Sér.		Obs.—Sér.	
	$\Delta\alpha''$	$\Delta\delta''$	$\Delta\alpha''$	$\Delta\delta''$
1908 Fév. 3.....	— 125	+ 55	— 60	+ 80
1909 Mars 10.....	+ 130	— 180	+ 155	— 180
1910 Avr. 27.....	+ 65	+ 65	+ 75	— 115
1911 Juin 21.....	— 30	— 200	+ 30	— 185
1912 Juil. 16.....	— 125	— 5	+ 80	— 55
1913 Juil. 29.....	— 105	— 175	— 110	— 195
1914 Juil. 23.....	+ 130	+ 160	+ 155	— 165
1916 Déc. 16.....	+ 20	0	+ 5	— 40
1922 Avr. 18.....	+ 110	— 190	+ 130	— 180
1941 Nov. 25.....	— 185	— 185	— 175	— 155
1946 Avr. 30.....	+ 195	— 180	+ 160	— 150

Nous pouvons ainsi conclure que les séries obtenues directement par analyse harmonique, et qui correspondent à une orbite préliminaire destinée à être améliorée par la suite, représentent le mouvement du VIII^e satellite de Jupiter à peu près cinq fois mieux que la meilleure théorie analytique publiée à ce jour.

27. Précision interne de l'analyse harmonique. Sur cet écart angulaire de $190''$, il est intéressant de connaître quelle est la partie due à une éventuelle indétermination dans les calculs de l'analyse harmonique.

Si celle-ci n'introduisait aucune erreur, les séries représentant les éléments et les séries obtenues en intégrant par rapport au temps celles qui représentent les dérivées de ces éléments devraient être identiques. Tout au plus devraient apparaître des différences dues à la perte de précision de certains termes par suite de petits diviseurs au cours de l'intégration. Si, par contre, des différences apparaissent entre les termes

correspondants de ces séries, elles proviennent d'une imprécision du mécanisme de l'analyse.

Le tableau X ⁽¹⁾ donne, pour l'excentricité e , les termes de la série obtenue par l'analyse harmonique (e_0) et, dans les deux dernières colonnes, l'intégrale de la série $\left(\frac{de}{dt}\right)_0$. Dans ce tableau, comme dans ceux qui suivent, on donne successivement les coefficients de D , F et I , puis, pour chaque série, le coefficient du terme en cosinus, puis le coefficient du terme en sinus correspondant tous deux au même argument. De même, le tableau XI donne les mêmes renseignements disposés de la même façon pour la longitude du nœud ascendant (Ω). Pour faciliter la présentation, les nombres ont été multipliés par 10^5 . L'unité des termes de Ω représente donc 10^{-5} rad. On a conservé pour e tous les termes supérieurs à 10^{-4} et pour Ω , ceux supérieurs à $2,5 \cdot 10^{-4}$ rad.

La colonne des remarques donne, à un facteur multiplicatif près, la valeur absolue du diviseur dans l'intégration.

Nous ne publions pas la même comparaison pour les quatre autres éléments, mais seulement les conclusions de l'étude qui a été faite sur eux. En fait, e et Ω représentent des cas typiques.

On constate une similitude très nette entre les deux séries à comparer. Les différences importantes correspondent bien, en général, aux petites valeurs du diviseur. En éliminant les termes correspondant aux plus petits et en ne conservant dans chaque série qu'environ les 100 termes les plus importants, on trouve qu'en moyenne, la valeur absolue des termes de $E - \int \left(\frac{dE}{dt}\right) dt$, où E est un élément, est respectivement :

pour α :	$2 \cdot 10^{-3}$
» e :	8
» i :	15
» Ω :	25
» ω :	40
» M :	60

On peut remarquer qu'en général les écarts sont gros pour des termes en eux-mêmes importants. Faisons l'approximation grossière que 100 termes ont un écart l et que les écarts dus aux autres termes ont une contribution négligeable. L'écart probable dû à un terme est de $\frac{l\sqrt{2}}{2}$.

Pour 100 termes, il sera de l'ordre de grandeur de

$$\frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{100} = 5l\sqrt{2}.$$

(1) Les tableaux X, XI, XII et XIII sont reportés à la fin du présent chapitre.

Ceci donnera, vu de la Terre, en supposant celle-ci à une distance de 4 U. A. du satellite et que ce dernier est à 0,15 U. A. de Jupiter, les écarts angulaires probables suivants :

pour a :	1"
» e :	4
» i :	8
» Ω :	12
» ω :	20
» M :	30

On peut donc dire que l'imprécision intrinsèque de l'analyse harmonique donnerait un écart probable vu de la Terre d'environ 40". Nous sommes loin des 160" constatés au paragraphe précédent. L'erreur la plus importante dans cette méthode est une erreur externe due aux termes importants qui n'ont pas été pris pour inconnues dans l'analyse. Nous retrouverons cette cause d'erreur un peu plus loin.

28. Deuxième approximation pour les éléments. L'étude de ces erreurs externes n'est possible que si nous pouvons comparer les séries précédentes avec d'autres séries représentant les mêmes éléments, mais ayant un éventail de termes beaucoup plus large. Le meilleur moyen d'obtenir ces séries est de substituer les séries de la première approximation dans les seconds membres des équations de Lagrange qu'on intégrera.

Nous avons déjà vu à la fin du chapitre IV comment nous avons calculé les coordonnées jovicentriques rectangulaires du satellite. Pour la suite du calcul, nous avons encore utilisé le formulaire du paragraphe 13. Les lignes trigonométriques de v , ω , Ω et i étant obtenues, ainsi que r , il n'y aura aucune difficulté à obtenir les dérivées partielles des coordonnées, les diverses puissances de $1 - e^2$ entrant dans ces formules étant préalablement calculées par un développement de Mac Laurin.

Dans le calcul des dérivées de la fonction perturbatrice, intervient la quantité $\frac{1}{\Delta^3}$; or

$$\Delta^2 = R^2 + r^2 + 2(x\Lambda + yY)$$

étant calculé, nous constatons que le terme constant de Δ^2 est $c = 27,154$, et que le coefficient du premier terme périodique est $-1,970$. Il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\Delta^2 = c(1 + \varepsilon).$$

où ε est une série petite devant l'unité. On aura donc

$$\Delta^{-3} = e^{-\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon)^{-\frac{3}{2}}$$

qu'on calcule à l'aide d'un développement de Mac Laurin.

L'autre difficulté provient du calcul des quantités A, B, C, D et E où interviennent les quantités $\sqrt{a}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{\sin i}$. Nous avons utilisé pour les calculer, une méthode d'itération en prenant pour développement approché, le résultat de l'analyse harmonique de chacune de ces quatre quantités.

Soit ainsi A une certaine série connue. Soit à développer $\frac{1}{A}$ et soit S une série approchant la série $\frac{1}{A}$.

Posons

$$\frac{1}{A} = S + \varepsilon.$$

Multiplions les deux membres par A. On a

$$1 = SA + \varepsilon A \quad \text{ou} \quad \varepsilon A = 1 - SA.$$

Multiplions maintenant les deux membres par S et confondons à gauche SA avec 1. On a alors une valeur approchée ε_1 de ε

$$\varepsilon_1 = (1 - SA)S.$$

Il suffit donc de deux multiplications de séries pour obtenir ε_1 .

Nous pouvons poser $S_1 = S + \varepsilon_1$ et calculer $S_1 A$. Si ce produit est encore insuffisamment proche de l'unité, on peut recommencer la même boucle de calcul.

De même, soit R une série approchant la série $\sqrt{A}$ et T celle qui approche $\frac{1}{\sqrt{A}}$, et posons

$$\sqrt{A} = R + \varepsilon.$$

Multiplions par $\sqrt{A}$:

$$A = R^2 + 2R\varepsilon.$$

On a

$$2R\varepsilon = A - R^2.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{R}$ que nous remplaçons par T qui est voisin.

On calcule ainsi une valeur approchée ε_1 de ε

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (A - R^2) T.$$

Il suffit, cette fois, de deux multiplications et d'une soustraction de séries pour obtenir ε_1 , soit $R_1 = R + \varepsilon_1$.

On fera encore autant d'itérations qu'il faudra.

Pratiquement, une seule a suffi pour le calcul de $\sqrt[3]{a}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ et $\frac{1}{\sin i}$. Il en a fallu deux pour celui de $\frac{1}{e}$.

Le reste du calcul se fait par des additions, multiplications et intégrations de séries de Fourier ne présentant aucune difficulté.

29. Comparaison des deux approximations. — Les principaux termes des séries de la première approximation (indice 0) sont mis en regard des termes correspondants de la seconde approximation (indice 1) dans les tableaux X à XIII, permettant ainsi au lecteur de les comparer visuellement :

Le tableau X donne, dans ses colonnes centrales, tous les termes de e_1 supérieurs en valeur absolue à 10^{-4} ;

Le tableau XI donne, dans ses colonnes centrales, tous les termes de Ω_1 supérieurs en valeur absolue à $2,5 \cdot 10^{-4}$ rad;

Le tableau XII donne tous les termes des séries a_0 et a_1 supérieurs à $3 \cdot 10^{-5}$, puis tous les termes des séries i_0 et i_1 supérieurs à $10 \cdot 10^{-5}$. Les termes ont encore été multipliés par 10^5 et des termes plus petits ont été ajoutés pour remplir les blancs du tableau;

Le tableau XIII donne, pour les séries M_0 , M_1 , ω_0 et ω_1 tous les termes qui sont supérieurs à $7 \cdot 10^{-4}$ à la fois pour au moins deux de ces séries. On a aussi supprimé quelques termes dont le coefficient de l dans l'argument était inférieur à -9 . Ainsi une quinzaine de termes, tous inférieurs à $11 \cdot 10^{-4}$, ont été supprimés pour ω ou pour M . Les termes, cette fois, ont été multipliés par 10^4 .

Dans tous ces tableaux, les termes omis dans l'analyse harmonique se reconnaissent par le fait que dans les colonnes réservées à la première approximation, ils sont mentionnés par un tiret.

On voit que les séries représentant les deux approximations successives ont une allure analogue. On remarque que les plus gros écarts correspondent aux termes pour lesquels le diviseur est petit, donc une partie de l'écart peut être dû à la perte de précision dans l'intégration fournissant la deuxième approximation. Ceci est surtout sensible pour quelques termes de M comme ceux en $2F - 2l$, $4F - 4l$, $D - 4F + 3l$ ou encore $4D + 2F - 7l$, $6D - 2F - 5l$ et $6D - 7l$, car, pour obtenir M , on effectue une double intégration, le diviseur réel étant le carré de celui indiqué dans la colonne des remarques.

Dans le calcul fait, il faut signaler qu'il s'est glissé une erreur. Lors de la substitution, dans les séries de la première approximation repré-

sentant e , Ω , ω et M , les termes $2D - 4F + \lambda l$ ($\lambda > 0$) ont vu leur argument remplacé par $2D - 4F - \lambda l$. Il est remarquable de constater — en particulier pour e , Ω et ω — comment la deuxième approximation a rétabli la vraie valeur des arguments incriminés, surtout compte tenu du petit diviseur de $2D - 2F + 2L$. Ainsi, par exemple, les termes

$$- 0.0241 \sin(2D - 2F - 2L) \quad \text{en } \Omega \quad \text{et} \quad + 0.0225 \sin(2D - 2F - 2L) \quad \text{en } \omega$$

ont disparu à la deuxième approximation et les termes suivants ont apparu :

$$- 0.0238 \sin(2D - 2F + 2L) \quad \text{en } \Omega \quad \text{et} \quad + 0.0251 \sin(2D - 2F + 2L) \quad \text{en } \omega.$$

Ainsi cette erreur, bien involontaire, donne peut-être la meilleure preuve de la convergence du processus d'itération pour résoudre les équations de Lagrange. En effet, nous avons ajouté aux données des termes inexistants qui ont disparu et omis des termes que nous savions exister, qui ont réapparu.

On peut donc penser que le même phénomène s'est produit pour les autres termes omis dans l'analyse harmonique et qui ont apparu à la seconde approximation. Il faut être plus prudent en ce qui concerne les fortes modifications subies par les termes pour lesquels le diviseur d'intégration est petit. Il en est ainsi, par exemple, du terme $0.00108 \cos(2F - 2L)$ dans a dont l'introduction dans n pour le calcul de l'anomalie moyenne aurait complètement modifié l'aspect du même terme de M . Aussi, pour la deuxième approximation de M , a-t-on préféré garder la première approximation de a dans le calcul de $\int n dt$. Ceci montre que lorsqu'on fera une nouvelle itération avec pour but la détermination des constantes d'intégration à l'aide des observations, il faudra faire un programme de multiplication de séries à précision variable de telle manière que les termes susceptibles d'être divisés par un petit nombre soient calculés avec une précision plus grande que les autres.

30. Termes linéaires des développements. — Comme nous n'avons pas résolu (excepté partiellement pour M) le problème des constantes d'intégration, les coefficients C_{000} n'ont pas été déterminés à la deuxième approximation. Cependant, nous avons par trois fois déterminé, au moins partiellement, le terme linéaire.

Au paragraphe 23 nous avons trouvé les arguments définitifs qui donnent :

$$\text{pour } \Omega : + 0.012222(t - t_0) + 302.977;$$

$$" \quad \omega : - 0.012222(t - t_0) + 101.291;$$

$$" \quad M : - 0.484192(t - t_0) + 97.409.$$

L'analyse harmonique des dérivées des éléments donne les coefficients de $t - t_0$ et celle des éléments fournit le terme constant. On trouve

$$\begin{aligned} \text{pour } a : & \quad 0 & (t - t_0) + 0,156\,82; \\ \text{» } e : & -9,10^{-8} & (t - t_0) + 0,410\,16; \\ \text{» } i : & +3,4\,10^{-6} & (t - t_0) + 148,241; \\ \text{» } \Omega : & +0,012\,143 & (t - t_0) + 302,357; \\ \text{» } \omega : & -0,012\,161 & (t - t_0) + 101,970; \\ \text{» } M : & -0,484\,123 & (t - t_0) + 97,427. \end{aligned}$$

Le calcul des dérivées des éléments pour la deuxième approximation a donné les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} \text{pour } a : & \quad 0 & (t - t_0); & \text{pour } \Omega : & +0,012\,130 & (t - t_0); \\ \text{» } e : & +7,10^{-8} & (t - t_0); & \text{» } \omega : & -0,012\,193 & (t - t_0); \\ \text{» } i : & -1,2\,10^{-6} & (t - t_0); & \text{» } M : & -0,484\,041 & (t - t_0). \end{aligned}$$

Les variations sont petites confirmant ce que nous avons dit sur la similitude des séries pour les deux approximations. Elles ne correspondent pas automatiquement à une erreur sur les arguments fondamentaux. Une partie des différences constatées se retrouveront, lors des approximations suivantes, dans les termes mixtes que nous avons négligés au paragraphe 17.

Vu la convergence du processus d'itération, la moyenne des valeurs données par les deux approximations doit être proche de la valeur réelle. Aussi proposons-nous les valeurs suivantes des termes séculaires :

$$\begin{aligned} \text{pour } \Omega : & \quad +0,012\,14 & \text{ par jour,} & \text{soit } + & 4,43 & \text{ par an} \\ \text{» } \omega : & -0,012\,18 & \text{ » } & \text{» } - & 4,45 & \text{ » } \\ \text{» } M : & -0,484\,08 & \text{ » } & \text{» } - & 176,81 & \text{ » } \end{aligned}$$

avec une erreur estimée à $0,02$ par an.

Le mouvement des nœuds serait direct (période $81,3$ ans) et aurait une valeur intermédiaire entre celle de Brown ($4,77$) [10] et celles de Proskourine ($4,02$ et $4,14$) [22].

La période de révolution sidérale serait de $745,75$ jours.

Enfin, le mouvement du périjove

$$\varpi = \Omega + \omega = -0,000\,4 \quad \text{par jour}$$

se ferait dans le sens inverse du mouvement des nœuds, contrairement aux résultats des auteurs cités, mais avec une vitesse tellement faible (période de l'ordre de $25\,000$ ans) que même le signe de cette quantité n'est pas certain. De toute façon, les perturbations planétaires sont du même ordre de grandeur et peuvent en modifier le sens.

31. Précision externe de l'analyse harmonique. Nous pouvons comparer les deux approximations de la même manière que nous avons comparé, au paragraphe 27, les séries issues de l'analyse harmonique. Sans éliminer cette fois les termes correspondant aux plus petits diviseurs, on calcule la moyenne des valeurs absolues des termes de $E_1 - E_0$ où E est un élément. On trouve successivement :

pour α :	$0,8 \cdot 10^{-4}$	en conservant	42 coefficients	supérieurs à	$10 \cdot 10^{-5}$
» e :	4	»	204	»	15
» i :	4	»	135	»	15
» Ω :	7	»	192	»	20
» ω :	15	»	246	»	60
» M :	20	»	187	»	80

En négligeant les autres termes, plus petits et dont les écarts sont aussi petits comparés à ceux-ci, on trouve les écarts angulaires probables (vus de la Terre) suivants :

pour α :	5"
» e :	30
» i :	25
» Ω :	50
» ω :	110
» M :	140

La contribution de M aux coordonnées se fait de deux manières. D'une part, par le rayon vecteur r où les termes de M seront multipliés par e , soit en moyenne par 0,4; d'autre part, par $\omega + M$. Or de nombreux termes de ω et M sont voisins et opposés. La moyenne des valeurs absolues des 127 termes principaux supérieurs à $50 \cdot 10^{-5}$ de $M + \omega$ est de $18 \cdot 10^{-4}$ et représente un écart angulaire probable de 110" seulement vu de la Terre. Ainsi on peut remplacer les deux derniers écarts ci-dessus par un écart de 110" en $\omega + M$ et 70" pour r . En combinant ces écarts, on arrive à un écart angulaire probable de 150", tout à fait de l'ordre de l'erreur trouvée au paragraphe 26.

On peut donc dire que la variation probable de position due aux modifications subies par les termes périodiques au cours de l'itération, est de l'ordre de grandeur de la précision avec laquelle la première approximation représente les observations. Ce chiffre de 150" peut donc représenter la précision externe de l'analyse harmonique. L'examen des tableaux montre qu'il est pour moitié dû aux termes omis dans la première approximation.

32. Signification analytique des séries obtenues. — Nous avons déjà répondu positivement au paragraphe 26 à la question de savoir

si les séries de la première approximation représentent les observations de façon satisfaisante. Ces séries seront donc à préférer aux résultats des théories analytiques existantes pour l'établissement d'une éphéméride dans un intervalle de temps pas trop grand, contenant les époques de ces observations. Pratiquement, l'établissement de ces éphémérides se réduirait à faire la somme des séries de Fourier VI et VII, alors que la théorie de Brown exige, en particulier, la résolution d'une équation de Képler avec, au second membre, 170 termes périodiques et ce, pour chaque date [23].

Mais la comparaison que nous venons de faire entre les séries de la première et de la seconde approximation nous montre de plus qu'elles sont proches des séries représentant la solution analytique des équations du mouvement. Nous avons, en effet, vu successivement :

1° que le processus d'itération ne modifie pas l'allure des séries, L'examen des tableaux X à XIII montre que les deux approximations des séries sont comparables terme à terme; la valeur des coefficients est conservée à la précision indiquée dans le paragraphe 31 près;

2° que cette première itération a eu pour effet un déplacement probable des positions calculées comparable aux écarts ($o - c$) enregistrés après la première approximation;

3° que le processus d'itération est convergent, ce qui a été montré par la disparition des termes en $2D - 4F - \lambda L$ introduits par erreur et leur remplacement, avec des coefficients semblables, par les termes omis en $2D - 4F + \lambda L$.

Nous pouvons déduire de la seconde proposition que la solution analytique parfaite de ce problème donnerait des séries qui sont, par rapport aux séries de la première approximation, dans un voisinage comparable à celui où se trouvent celles de la seconde approximation. Il s'ensuit, en utilisant les résultats du 1°, que l'allure de cette solution parfaite est comparable terme à terme à l'allure des deux approximations. Avec la restriction déjà signalée des termes à longue période, et, en utilisant la convergence du processus d'itération, la deuxième approximation (et, par conséquent, aussi la première) représente effectivement une solution analytique approchée. Ainsi, le résultat de l'analyse harmonique, sous la forme des éléments, ou encore des séries VI et VII, a-t-il toutes les caractéristiques d'une représentation analytique approchée du mouvement.

Nous ne pouvons pas décider, faute d'avoir dans la théorie de Brown et Brouwer des séries directement comparables aux nôtres, dans laquelle des deux théories les termes calculés sont les plus proches de la solution idéale. Cependant, les séries de Brown-Brouwer sont beaucoup plus tronquées que les nôtres, même dans la première approximation. Un asté-

risque indique dans les tableaux X à XIII les termes qui ont été négligés dans le travail de Brown; on constate l'importance de certains d'entre eux, comme par exemple les termes d'arguments $4F - 4l$, $2D - 4F - 2l$, $2D + 4F - 6l$, conservés seulement pour Ω ou encore $D - 2F + l$, $3D - 2F - l$, $5D + 2F - 8l$, $3D - 4F + l$, $6F - 6l$,

En définitive, on peut affirmer que les séries fournies par l'analyse harmonique, malgré leur caractère non définitif, constituent une représentation analytique plus précise et plus complète du mouvement du VIII^e satellite de Jupiter que les théories existantes.

TABLEAU X.

Comparaison des séries e_0 , e_1 et $\int \left(\frac{de}{dt} \right)_0 dt$.

Unités : 10^{-5} .

Coefficient de			e_0		e_1		$\int \left(\frac{de}{dt} \right)_0 dt$		Remarques.							
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.								
0	0	0	+ 41 017	0	—	—	—	—	—							
0	0	+ 1	— 198	+	2	— 230	+	1	— 199	0	0,8					
0	0	+ 2	— 162	—	5	— 134	—	3	— 163	+	3	1,7				
0	0	+ 3	+	76	+	1	+	58	—	2	+	76	0	2,5		
0	0	+ 4	+	66	+	4	+	76		0	+	69	+	1	3,4	
0	0	+ 5	+	38		0	+	41		0	+	38		0	4,2	
0	0	+ 6	+	27	+	9	+	19	+	1	+	20		0	5,1	
0	0	+ 7	—	—	+	+	13	—	1	—	—	—			5,9	
0	+	2	— 6	+	1	+	14		0	+	17	+	2		3,3	
0	+	2	— 5	+	2	+	28	+	3	+	25	—	1		2,5	
0	+	2	— 4	—	11	—	58	—	52	—	48	+	9		1,6	
0	+	2	— 3	—	1	—	168	+	12	—	208	+	2		0,8	
0	+	2	— 2	— 10 731	+	173	— 10 377	+	307	— 10 663	+	285			0,04	
0	+	2	— 1	+	14	+	880	—	12	+	858	—	20		0,9	
0	+	2	0	— 10	+	4	+	23	—	1	—	8	+	2	1,7	
0	+	2	+	1	+	1	+	41	+	1	+	34	—	1	2,6	
0	+	4	— 6	—	18	—	15	—	6	—	45	+	16		1,6 *	
0	+	4	— 5	+	7	+	11	+	13	+	15	—	12		0,8 *	
0	+	4	— 4	+	14	—	130	+	83	—	17	+	18		0,08 *	
0	+	4	— 3	+	6	+	65		0	+	48	—	4		0,9 *	
0	+	4	— 2	+	9	—	11	+	1	—	2	+	3		1,8 *	
0	+	6	— 7	—	+	+	14		0	—	—	—			0,7 *	
0	+	6	— 6	—	16	+	94	+	8	+	18	+	9		0,12 *	
0	+	6	— 5	0	—	20	+	31	—	4	—	7	+	14	1,0 *	
0	+	6	— 4	+	9		0		0	+	18	+	9		1,8 *	
+ 1	—	4	+	1	—	18	+	23		0	—	9	+	25	1,6 *	
+ 1	—	4	+	2	—	14	—	22	+	3	+	11	+	26	0,8 *	
+ 1	—	4	+	3	—	46	+	196		0	+	45	+	128	0,06 *	
+ 1	—	2	—	1	—	11	—	29	—	5	—	8	—	27	1,6 *	
+ 1	—	2	0	—	41	+	75	—	35	+	70	—	39	+	72	0,7 *

TABLEAU X (suite).

Coefficient de					e_p		$\int (V_{p,q})^{p,q}$		Remarques.
p	1	2	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
1	0	1	100	0	331	0	118	226	0,1 *
1	0	2	1	0	13	0	3	22	0,9 *
1	0	3	11	0	0	0	1	8	3,9
1	0	4	3	0	1	10	1	6	2,4
1	0	5	0	3,1	1	0	1	3,0	1,5
1	0	6	18	0	10	33	12	23	0,7
1	0	7	100	178	338	3,1	331	193	0,15
1	0	8	37	10	38	10	33	49	1,0
1	0	9	0	0	0	0	0	13	2,3 *
1	0	10	1	10	8	25	1	42	1,5 *
1	0	11	20	8	3	18	1	6	0,7 *
1	0	12	7	17	83	0,3	57	212	0,2 *
1	0	13	1	33	3	33	8 +	56	1,0 *
1	0	14	11	0	13	10	17 +	7	0,9 *
1	1	0	1	100	8	7	15 +	103	0,6 *
1	1	1	1	10	30	30	8	63	0,2 *
1	1	2	0	10	13	11	12	11	1,1 *
2	10	8			38	31			0,08 *
2	10				10	10			0,15 *
2	10	0	17	0	13	0	23	0	1,5 *
2	10	0	33	3	7	3	15	0	0,6 *
2	10	1	0	11	180	10	178	12	0,2 *
2	10	3	17	0	0	0	17	1	1,1 *
2	10	5	33	0	18	0	11	3	1,9 *
2	10	7	10	0	10	0	13	0	2,7 *
2	10		83	10	10	0	80	22	0,6
2	10	0	177	119	133	113	3183	198	0,25
2	10	1	113	10	305	18	303	18	1,1
2	10	3	0	0	0	3	8	1	1,9
2	10	5	33	0	30	0	33	3	0,8
2	10	7	0	0	0	0	17	1	3,6
2	10	9	0	0	10	0	10	0	1,5
2	10	11	0	0	0	1			1,8
2	10	13	0	0	0	0			3,9
2	10	15	10	0	0	3 -	18	0	3,1

TABLEAU X (suite).

Coefficient de			c_0		c_1		$\int \left(\frac{dc}{dt} \right)_a dt.$		Remarques.
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 2	0	5	0	0	4	2	7	2	2, 2
+ 2	0	4	97	6	110	4	91	5	1, 4
+ 2	0	3	709	26	651	13	713	24	0, 6
+ 2	0	2	9 242	132	9 043	124	9 268	130	0, 3
+ 2	0	1	3 571	44	3 569	47	3 576	45	1, 1
+ 2	0	0	175	7	144	8	178	8	2, 0
+ 2	0	+ 1	203	3	216	2	205	5	2, 8
+ 2	0	+ 2	134	0	138	0	133	1	3, 7
+ 2	0	+ 3	63	0	73	1	64	0	4, 5
+ 2	0	+ 4	29	0	26	1	28	0	5, 3
+ 2	0	+ 5	10	1	14	0	11	0	6, 2
+ 2	2	6	26	4	45	4	28	4	1, 4
+ 2	2	5	67	0	20	16	64	6	0, 5
+ 2	2	4	661	6	602	3	658	9	0, 3
+ 2	2	3	501	3	483	7	501	6	1, 2
+ 2	2	2	22	3	39	4	22	3	2, 0
+ 2	2	1	10	0	17	2	10	0	2, 8
+ 2	2	0	19	2	31	2	22	1	3, 7
+ 2	2	+ 1	23	2	27	0	24	0	4, 5
+ 2	2	+ 2	18	0	16	1	17	0	5, 4
+ 2	2	+ 3	10	0	14	0	11	0	6, 2
+ 2	4	7	—	—	38	13	—	—	0, 5 *
+ 2	4	6	78	6	19	27	65	3	0, 4 *
+ 2	4	5	81	1	87	2	88	3	1, 2 *
+ 2	4	4	7	3	15	5	3	0	2, 1 *
+ 2	6	8	—	—	70	17	—	—	0, 4 *
+ 2	6	7	—	—	23	8	—	—	1, 3 *
+ 3	2	3	8	19	5	11	3	21	1, 3 *
+ 3	2	2	17	11	4	24	8	14	0, 5 *
+ 3	2	1	209	235	201	318	226	239	0, 4 *
+ 3	2	0	7	63	24	69	10	62	1, 2 *
+ 3	2	+ 1	13	0	4	1	10	0	2, 1 *
+ 3	0	5	14	33	9	21	13	32	1, 3
+ 3	0	4	85	112	39	49	98	115	0, 4
+ 3	0	3	458	821	402	717	466	822	0, 4

TABLEAU X (suite).

Coefficient de			c_0		c_1		$\int \left(\frac{dc}{dl}\right)_0 dt.$		Remarques.
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 3	0	2	194	+ 401	177	+ 383	198	+ 402	1, 3
+ 3	0	1	39	18	42	8	39	17	2, 1
+ 3	0	0	19	+ 18	19	+ 16	19	+ 16	3, 0
+ 3	0	+ 1	15	+ 13	14	+ 9	16	+ 12	3, 8
+ 3	0	+ 2	7	+ 6	10	+ 7	9	+ 6	4, 7
+ 3	+ 2	7	-	-	+ 4	27	-	-	1, 2 *
+ 3	+ 2	6	+ 11	+ 60	35	+ 22	13	+ 69	0, 4 *
+ 3	+ 2	5	+ 45	59	2	36	+ 53	63	0, 5 *
+ 3	+ 2	4	37	+ 77	26	+ 60	33	+ 76	1, 3 *
+ 3	+ 4	8	-	-	+ 3	83	-	-	0, 3 *
+ 3	+ 4	7	-	-	+ 4	21	-	-	0, 5 *
+ 4	6	1	-	-	+ 18	10	-	-	0, 4 *
+ 4	6	2	-	-	+ 20	2	-	-	0, 5 *
+ 4	4	1	-	-	20	3	-	-	0, 3 *
+ 4	4	0	-	-	81	10	-	-	0, 5 *
+ 4	2	3	8	+ 8	0	0	+ 62	8	0, 3
+ 4	2	2	+ 230	14	+ 234	7	+ 190	7	0, 5
+ 4	2	1	72	+ 1	61	1	104	+ 4	1, 4
+ 4	2	0	13	0	+ 3	1	10	0	2, 2
+ 4	2	+ 1	-	-	17	+ 1	-	-	3, 1
+ 4	0	7	-	-	+ 19	5	-	-	2, 0
+ 4	0	6	45	+ 9	50	2	45	+ 9	1, 1
+ 4	0	5	73	+ 17	+ 53	4	79	+ 23	0, 3
+ 4	0	4	627	+ 40	610	+ 33	628	+ 38	0, 6
+ 4	0	3	+ 411	15	+ 426	20	+ 412	17	1, 4
+ 4	0	2	29	7	31	11	27	10	2, 3
+ 4	0	1	31	16	28	0	43	3	1, 0
+ 4	0	0	24	+ 1	51	6	34	2	4, 0
+ 4	0	+ 1	24	5	16	1	23	1	4, 8
+ 4	0	+ 2	15	0	10	2	14	1	5, 6
+ 4	+ 2	7	-	-	+ 81	9	-	-	0, 2
+ 4	+ 2	6	114	+ 9	95	5	100	+ 3	0, 6
+ 4	+ 2	5	+ 139	7	+ 152	5	+ 150	6	1, 5
+ 4	+ 2	4	30	0	33	1	22	2	2, 3
+ 4	+ 2	3	+ 12	11	2	1	13	3	2, 0

TABLEAU X (suite et fin).

Coefficient de			c_0		c_1		$\int \left(\frac{dc}{dt} \right)_0 dt$		Remarques.									
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.										
4	+	4	—	—	+	17	—	33	—	—	0,2 *							
÷	4	+	4	—	8	—	—	57	—	6	0,7 *							
+	4	+	4	—	7	—	—	54	+	4	1,5 *							
+	4	+	4	—	6	—	—	17	—	2	2,3 *							
÷	4	+	6	—	10	—	—	30	+	1	0,7 *							
—	4	+	6	—	9	—	—	19	—	1	1,5 *							
+	5	—	2	—	4	—	—	37	+	43	0,15 *							
+	5	—	2	—	3	—	—	45	+	82	0,7 *							
+	5	—	2	—	2	—	—	16	—	27	1,5 *							
+	5		0	—	7	—	—	11	—	26	1,0							
+	5		0		6	—	—	150	+	259	0,1							
+	5		0		5	—	—	52	—	90	0,7							
+	5		0	—	4	—	—	39	+	88	1,6							
+	5	+	2	—	8	—	—	194	+	310	0,07 *							
—	5	+	4	—	10	—	—	57	+	228	0,04 *							
+	6	—	4	—	3	—	—	84	+	34	0,06 *							
+	6	—	4		2	—	—	18	+	1	0,8 *							
+	6	—	2	—	5	—	—	116	+	116	0,02							
+	6	—	2	—	4	—	—	29	—	5	0,8							
+	6	—	2	—	3	—	—	39	+	4	1,7 *							
+	6		0	—	8	—	—	16	+	5	0,8							
+	6		0	—	7	—	—	318	+	40	0,03							
+	6		0	—	6	—	36	+	63	+	3	—	29	+	5	0,7		
+	6		0	—	5	+	64	—	10	+	69	—	3	+	67	—	10	1,7
+	6		0	—	4	—	19	+	1	—	23	—	5	—	14	+	2	2,6
+	6	+	2	—	9	—	—	+	133	—	15	—	—	—	—	—	—	0,07 *
+	6	+	2	—	8	—	—	—	31	+	2	—	—	—	—	—	—	0,9
+	6	+	2	—	7	—	—	+	38	—	1	—	—	—	—	—	—	1,8
—	6	+	4	—	11	—	—	+	36	+	9	—	—	—	—	—	—	0,1 *
+	6	+	4	—	10	—	—	—	17		0	—	—	—	—	—	—	1,0 *
+	6	+	4	—	9	—	—	+	25		0	—	—	—	—	—	—	1,8 *
+	7	+	2	—	10	—	—	+	9	—	24	—	—	—	—	—	—	0,2 *
+	8		0	—	9	—	—	+	29	—	3	—	—	—	—	—	—	0,3 *

TABLEAU XI.

Comparaison des séries Ω_0 , Ω_1 et $\int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 dt$.

Unités : 10^{-5} rad.

Coefficient de			Ω_0		Ω_1		$\int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 dt$		Remarques.
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
o	o	o	+527712	o	—	—	—	—	—
o	o	+1	+10	+1386	o	+1317	+15	+1353	o,8
o	o	+2	+5	+140	—	7+	180	—5+	163
o	o	+3	o	+27	o	+4	—4+	13	2,5
o	o	+4	+36	+18	+	1—	7—	1+	3
o	+	2—	4—	1—	1+	21—	1+	3	1,6
o	+	2—	3+	10+	9+	121+	23+	143	o,8
o	+	2—	2+	456+	47+	22759+	677+	23459	o,04
o	+	2—	1—	51—	5—	2275—	61—	2324	o,9
o	+	2	o+	20+	1+	571+	15+	572	1,7
o	+	2+	1+	11+	2+	147+	4+	146	2,6
o	+	2+	2—	3+	1+	61—	2+	39	3,4
o	+	4—	6+	25—	o—	3+	9—	5	1,6
o	+	4—	5—	41—	1—	33+	6—	42	o,8
o	+	4—	4—	313—	130—	3101—	165—	3241	o,08
o	+	4—	3+	58+	13+	601+	28+	594	o,9
o	+	4—	2—	41—	5—	117—	6—	132	1,8
o	+	4—	1+	5—	2—	63—	1—	62	2,6
o	+	4	o	o—	o—	24	o—	24	3,5
o	+	6—	6+	89+	24+	535+	106+	411	o,12 *
o	+	6—	5—	19—	9—	154—	3—	160	1,0 *
o	+	6—	4+	8+	4+	33—	2+	38	1,8 *
o	+	6—	2—	43—	1+	7—	1+	6	3,5 *
o	+	8—	8—	—	6—	94—	—	—	o,2 *
o	+	8—	7—	—	5+	34—	—	—	1,0 *
—1	—	6+	5—	—	+	337+	—	—	o,02 *
+1	—	4+	1+	11—	9—	17+	20—	12	1,6 *
+1	—	4+	2—	24+	25+	11—	35+	22	o,8 *
+1	—	4+	3+	317—	201+	216—	282+	139—	169
+1	—	4+	4—	59—	8	o	o—	46+	19

TABLEAU XI (suite).

Coefficient de			Ω_0		Ω_1		$\int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 dt.$		Remarques.										
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.											
+	1	—	4	+	5	+	27	+	65	—	5	—	2	—	0	—	13	1,7	*
+	1	—	2	—	1	+	59	+	41	+	25	+	15	+	47	+	28	1,6	*
+	1	—	2		0	—	178	—	74	—	127	—	43	—	162	—	47	0,7	*
+	1	—	2	+	1	—	991	+	399	—	770	+	516	—	864	+	606	0,1	*
+	1	—	2	+	2	+	88	—	2	+	19	—	24	+	77	—	26	0,9	*
+	1		0	—	5	—	144	+	108	—	1		0	+	4	—	8	3,2	
+	1		0		2	+	130	+	83	+	100	+	54	+	128	+	50	0,7	
+	1		0	—	1	+	1547	+	529	+	1579	+	552	+	1565	+	357	0,15	
+	1		0		0	—	67	+	121	—	101	+	126	—	70	+	146	1,0	
+	1		0	+	1	+	6	—	8	+	8	—	17	+	1	—	22	1,8	
+	1	+	2	—	4	—	40	+	35	—	11	—	12	—	50	+	16	0,7	*
+	1	+	2	—	3	—	138	—	58	—	373	—	155	—	125	—	133	0,2	*
+	1	+	2	—	2	+	122	+	11	+	135	+	35	+	121	+	24	1,0	*
+	1	+	2	—	1	—	37	+	22	—	30	+	17	—	37	+	13	1,9	*
+	1	+	2		0	—	5	—	20	—	6	—	11	—	9	—	11	2,7	*
+	1	+	4	—	6	+	67	—	58	+	20		0	+	4	—	24	0,6	*
+	1	+	4	—	5	+	400	—	7	+	165	+	35	+	260	+	68	0,2	*
+	1	+	4	—	4	—	92	+	2	—	48	—	15	—	62	+	13	1,0	*
+	1	+	4	—	3	+	21	—	58	+	6	—	9	+	10	—	4	1,9	*
+	1	+	4	—	2	—	16	+	21	+	4	+	3		0	+	1	2,8	*
+	2	—	10	+	8		—	—	—	—	13	+	90	—	—	—	—	0,08	*
+	2	—	8	+	6		—	—	—	—	66	—	249	—	—	—	—	0,12	*
+	2	—	6	+	4		—	—	—	—	68	+	786	—	—	—	—	0,16	
+	2	—	4		0		0	—	92	+	3	—	81		0	—	8	1,5	
+	2	—	4	+	1	—	42	+	62	+	5	+	36	—	56	+	13	0,6	
+	2	—	4	+	2	—	86	—	2405	+	88	—	2378	—	153	—	2282	0,2	
+	2	—	4	+	3	—	2	+	178	—	2	+	166	+	15	+	159	1,1	
+	2	—	4	+	4	+	25		0	+	2	+	13	+	20		0	1,9	
+	2	—	2	—	4	+	58	—	132	—	1	—	20		0		0	3,1	
+	2	—	2	—	3		0	—	15	+	1	—	38		0	—	38	2,3	
+	2	—	2	—	2	—	21	—	149	—	1	—	123	—	10	—	124	1,4	
+	2	—	2	—	1	+	6	+	838		0	+	814	—	16	+	780	0,6	
+	2	—	2		0	—	300	+	8099	—	133	+	7931	—	356	+	7965	0,25	
+	2	—	2	+	1	+	21	—	919	+	19	—	848	+	33	—	898	1,1	
+	2	—	2	+	2	+	21	—	78	+	2	—	108	+	5	—	96	1,9	

TABLEAU XI (suite).

Coefficient de			Ω_0		Ω_1		$\int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 dt$		Remarques.
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 2	0	4	3	42	2	45	3	44	1,4
+ 2	0	3	8	41	0	0	13	37	0,8
+ 2	0	2	55	1045	17	1062	48	1039	0,3
+ 2	0	1	43	1519	29	1501	40	1519	1,1
+ 2	0	0	17	601	14	602	10	606	2,0
+ 2	0	+ 1	4	186	4	185	2	180	2,8
+ 2	0	2	1	55	0	56	1	52	3,7
+ 2	2	6	11	56	2	6	17	36	1,4
+ 2	2	5	55	164	14	20	72	116	0,5
2	2	4	20	68	6	129	3	139	0,3
+ 2	2	3	12	16	3	21	3	3	1,2
+ 2	2	2	4	63	5	53	0	52	2,0
+ 2	4	6	66	18	3	27	4	38	0,4
+ 2	4	5	8	8	1	13	3	1	1,2
+ 3	6	3	-	-	19	45	-	-	0,3 *
+ 3	4	0	-	-	12	42	-	-	0,5 *
+ 3	4	+ 1	-	-	131	171	-	-	0,35 *
+ 3	2	3	47	29	10	8	50	12	1,3 *
+ 3	2	2	140	149	170	113	146	98	0,5 *
+ 3	2	1	507	502	573	430	497	444	0,4 *
+ 3	2	0	69	41	80	35	67	23	1,2 *
+ 3	0	5	29	17	5	4	29	0	1,3
+ 3	0	4	134	59	7	7	139	8	0,4
+ 3	0	3	20	86	168	97	17	137	0,4
+ 3	0	2	142	112	180	123	142	131	1,3
+ 3	0	1	58	5	63	28	65	22	2,1
+ 3	0	0	42	63	16	25	15	24	3,0
+ 3	2	6	3	44	0	0	37	105	0,3 *
+ 3	2	5	169	33	23	25	142	18	0,5 *
+ 3	2	4	39	16	11	11	29	5	1,3 *
+ 4	6	+ 1	-	-	3	20	-	-	0,4 *
+ 4	6	2	-	-	13	126	-	-	0,5 *
+ 4	6	3	-	-	5	41	-	-	1,3 *
+ 4	4	1	-	-	3	29	-	-	0,3
+ 4	4	0	-	-	30	464	-	-	0,5

TABLEAU XI (suite et fin).

Coefficient de			Ω_1		Ω_0		$\int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 dt$		Remarques.
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 4	— 4	+ 1	—	—	+ 6	— 119	—	—	1,3
+ 4	— 2	— 3	+ 36	— 35	+ 26	+ 26	+ 73	— 27	0,3
— 4	— 2	— 2	+ 60	— 245	+ 48	— 180	+ 74	— 244	0,5
+ 4	— 2	— 1	— 18	+ 222	— 13	+ 200	— 8	+ 221	1,4
+ 4	0	— 5	+ 28	+ 91	0	0	+ 57	— 23	0,3
+ 4	0	— 4	— 69	+ 53	— 7	— 28	— 51	+ 5	0,6
+ 4	0	— 3	+ 37	— 69	+ 16	— 24	+ 32	— 44	1,4
+ 4	0	— 2	+ 3	+ 51	— 6	+ 26	— 4	+ 27	2,3
+ 5	— 4	— 2	—	—	— 24	— 15	—	—	0,2 *
+ 5	— 4	— 1	—	—	— 56	— 42	—	—	0,6 *
+ 5	— 4	0	—	—	+ 20	+ 13	—	—	1,5 *
+ 5	— 2	— 4	—	—	— 43	0	—	—	0,15 *
+ 5	— 2	— 3	—	—	+ 10	+ 21	—	—	0,7 *
+ 5	0	— 6	—	—	— 50	— 17	—	—	0,12
+ 5	+ 2	— 8	—	—	— 13	— 65	—	—	0,08 *
+ 6	— 4	— 3	—	—	0	— 67	—	—	0,06
+ 6	— 4	— 2	—	—	+ 6	— 19	—	—	0,8
+ 6	— 4	— 1	—	—	— 4	+ 25	—	—	1,6
+ 6	0	— 7	—	—	— 159	+ 278	—	—	0,03
+ 6	0	— 6	+ 5	— 36	0	— 10	+ 26	— 8	0,9
+ 6	0	— 1	— 141	+ 207	0	0	0	+ 3	1,0
+ 8	— 4	— 5	—	—	0	+ 26	—	—	0,2
+ 8	— 2	— 8	—	—	0	— 17	—	—	0,6
+ 8	— 2	— 7	—	—	0	— 26	—	—	0,3

MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DE PERTURBA

TABLEAU XII.

Comparaison des séries a_0 et a_1 , ainsi qUnités : 10^{-5} U. A. pour a et 10^{-5} rad

Coefficient de			a_0		a_1		Coef de
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
0	0	0	+ 15 682	0	—	—	+ 2
0	0	+ 1	— 66	0	— 77	— 4	+
0	0	+ 2	+ 65	0	+ 57	— 1	—
0	0	+ 3	+ 32	0	+ 35	0	—
0	0	+ 4	+ 15	0	+ 14	0	—
0	0	+ 5	+ 7	0	+ 7	0	+
0	0	+ 6	+ 3	0	+ 4	0	+
0	+ 2	— 4	+ 3	0	+ 4	— 1	—
0	+ 2	— 3	+ 17	0	+ 20	— 1	—
0	+ 2	— 2	— 8	0	+ 118	0	—
0	+ 2	— 1	— 70	+ 1	— 70	0	+
0	+ 2	0	+ 57	— 1	+ 58	+ 1	—
0	+ 2	+ 1	+ 18	0	+ 23	0	—
0	+ 2	+ 2	+ 5	0	+ 7	0	—
0	+ 4	— 5	— 1	0	+ 0	0	+
0	+ 4	— 4	0	0	+ 24	0	+
0	+ 4	— 3	+ 4	0	0	0	—
0	+ 4	— 2	+ 2	0	— 2	0	+
0	+ 4	— 1	— 6	0	— 6	0	+
0	+ 4	0	— 3	0	— 3	0	+
0	+ 6	— 6	0	0	0	0	—
0	+ 6	— 5	0	0	+ 3	0	+
0	+ 6	— 4	0	0	+ 2	— 1	—
0	+ 6	— 2	0	0	0	0	+
+ 1	— 4	+ 2	0	— 1	0	— 3	+
+ 1	— 4	+ 3	0	0	0	0	—
+ 1	— 4	+ 4	0	+ 1	0	0	—
+ 1	— 2	— 1	— 2	+ 3	— 3	+ 3	+
+ 1	— 2	0	— 1	— 4	0	0	—
+ 1	— 2	+ 1	0	— 1	0	0	+

TABLEAU XII (suite).

a_1		t_0		i_1		Remarques.						
Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.							
+	1	+	4	—	12	+	21	—	11	—	6	0,9 *
—	0	+	2	+	42	+	48	—	1	—	2	3,2
—	2	+	3	0	—	12	+	7	—	8	1,5	
+	1	—	11	+	11	+	14	+	9	+	20	0,7
0	0	+	0	+	94	—	40	+	97	—	69	0,15
—	3	—	11	—	27	+	11	—	15	—	16	1,0
+	2	+	8	—	7	+	0	+	6	+	7	1,8
—	1	+	3	0	0	+	0	+	2	+	2	2,7
—	2	—	3	+	1	—	10	—	11	—	20	0,7 *
0	0	+	0	+	30	—	231	—	21	—	112	0,2 *
+	3	—	6	—	12	+	62	—	9	+	61	1,0 *
+	2	+	4	—	5	—	14	—	4	—	21	1,9 *
0	0	+	0	+	10	—	13	+	5	+	3	0,6 *
+	4	—	13	—	10	—	33	—	22	+	26	0,2 *
—	1	+	1	—	2	—	12	+	8	—	17	1,1 *
0	0	+	0	+	27	0	+	4	+	4	1,9 *	
+	3	—	1	—	37	0	—	42	+	3	0,15 *	
+	2	0	—	10	—	33	—	10	—	4	1,5 *	
0	0	—	0	—	853	+	25	—	877	—	34	0,6 *
0	0	+	0	+	78	+	1	+	57	0	1,1 *	
+	1	0	—	55	—	17	—	4	+	1	3,1	
+	7	0	—	15	+	5	—	37	—	2	2,3	
0	0	—	0	—	60	—	13	—	33	+	3	1,4
—	32	+	2	+	473	+	29	+	437	—	15	0,6
—	24	0	+	3 683	+	184	+	3 630	+	8	0,25	
+	61	+	3	—	123	—	17	—	142	—	1	1,1
+	17	+	1	+	25	+	7	+	22	+	1	1,9
+	5	0	+	3	—	4	+	8	—	2	2,8	
+	5	0	—	5	—	1	—	3	—	0	2,2	

TABLEAU XII (suite).

Coefficient de			a_0 .		a_1 .		Co d
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 2	0	— 4	+ 2	0	+ 4	+ 1	
+ 2	0	— 3	— 35	0	— 45	— 2	+
+ 2	0	— 2	+ 6	0	+ 21	+ 3	+
+ 2	0	— 1	— 451	— 5	— 446	— 5	—
+ 2	0	0	+ 293	+ 3	+ 298	+ 3	+
+ 2	0	+ 1	+ 119	0	+ 127	+ 1	+
+ 2	0	+ 2	+ 47	0	+ 51	0	+
+ 2	0	+ 3	+ 19	0	+ 20	0	+
+ 2	0	+ 4	+ 8	0	+ 8	0	+
+ 2	0	+ 5	+ 3	0	+ 3	0	+
+ 2	+ 2	— 6	0	0	— 3	— 1	—
+ 2	+ 2	— 5	+ 3	0	+ 20	+ 2	+
+ 2	+ 2	— 4	— 1	0	+ 15	0	—
+ 2	+ 2	— 3	+ 14	0	+ 8	— 1	—
+ 2	+ 2	— 2	+ 37	0	+ 30	0	+
+ 2	+ 2	— 1	— 19	0	— 24	0	+
+ 2	+ 2	0	— 17	0	— 19	+ 1	—
+ 2	+ 2	+ 1	— 10	0	— 12	0	—
+ 2	+ 2	+ 2	— 6	0	— 6	0	—
+ 2	+ 2	+ 3	— 3	0	— 3	0	—
+ 2	+ 4	— 7	—	—	+ 4	0	
+ 2	+ 4	— 6	— 1	+ 1	0	0	—
+ 2	+ 4	— 5	0	0	+ 2	— 1	+
+ 3	— 4	0	—	—	— 2	— 4	
+ 3	— 4	+ 1	—	—	0	0	
+ 3	— 2	— 3	— 1	0	0	0	+
+ 3	— 2	— 2	+ 2	— 4	0	0	—
+ 3	— 2	— 1	0	0	0	0	—
+ 3	— 2	0	— 6	+ 5	— 4	+ 6	—
+ 3	— 2	+ 1	— 5	+ 1	— 4	0	—

TABLEAU XII (suite).

a_1		i_{10}		i_{11}		Remarques.
Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 7	— 20	— 9	— 20	— 24	+ 39	0,4
— 5	— 2	— 114	+ 222	— 117	+ 198	0,4
+ 34	— 49	+ 58	— 117	+ 64	— 110	1,3
— 15	+ 32	— 9	+ 32	— 17	+ 35	2,1
— 15	+ 12	— 22	+ 23	— 15	+ 14	3,0
— 8	+ 5	— 8	0	— 6	+ 1	3,8
— 4	+ 2	— 2	+ 1	0	0	4,7
— 3	— 5	+ 33	+ 23	— 5	— 22	0,4 *
0	0	+ 10	+ 29	— 6	— 36	0,5 *
— 4	+ 4	— 5	+ 9	— 4	+ 9	2,2 *
0	+ 3	—	—	+ 18	— 22	0,3 *
0	— 4	—	—	+ 6	— 21	0,5 *
+ 4	0	—	—	— 1	+ 6	1,2 *
+ 9	+ 3	—	—	+ 34	— 9	0,3 *
0	0	—	—	+ 200	+ 24	0,5 *
— 3	0	—	—	— 60	— 6	1,3 *
0	0	— 26	+ 14	— 85	+ 7	0,3
+ 2	— 2	— 126	— 27	— 110	— 28	0,5
— 2	— 1	+ 85	+ 2	+ 98	+ 9	1,4
— 9	+ 1	— 18	0	— 22	— 3	1,2
+ 15	0	+ 21	+ 22	+ 8	— 11	0,3
+ 16	+ 2	— 41	+ 1	— 41	— 17	0,6
+ 4	+ 6	+ 73	0	+ 73	+ 11	1,4
+ 5	— 3	— 39	+ 1	— 35	— 2	2,3
— 29	— 3	+ 43	— 46	— 14	— 4	3,1
— 14	— 2	— 13	0	— 9	— 1	4,0
— 9	— 1	— 9	— 2	— 5	— 1	4,8
— 4	0	— 2	— 2	— 5	0	5,6
0	0	—	—	+ 18	+ 22	0,25
+ 8	0	+ 9	+ 4	— 3	— 5	0,6

TABLEAU XII (suite et fin).

Coefficient de			$a_{4,}$		$a_{5,}$		Co
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 4	+ 2	— 3	0	0	— 1	0	+
+ 4	+ 2	— 2	+ 6	0	+ 6	0	
+ 4	+ 2	— 1	+ 6	0	+ 5	0	+
+ 4	+ 2	0	+ 3	0	+ 3	0	+
+ 5	— 4	— 2	—	—	0	0	
+ 5	— 4	— 1	—	—	0	0	
+ 5	— 4	0	—	—	0	0	
+ 5	— 2	— 3	—	—	— 1	+ 1	
+ 5	— 2	— 2	—	—	+ 1	+ 1	
+ 5	0	— 6	—	—	0	0	
+ 5	0	— 5	—	—	— 1	— 3	
+ 5	0	— 2	—	—	+ 4	— 6	
+ 5	+ 2	— 8	—	—	0	0	
+ 6	— 6	— 1	—	—	0	0	
+ 6	— 4	— 3	—	—	0	0	
+ 6	— 4	— 2	—	—	0	0	
+ 6	— 2	— 5	—	—	0	0	
+ 6	0	— 7	—	—	0	0	
+ 6	0	— 6	— 1	0	+ 5	— 1	+
+ 6	0	— 2	+ 3	0	+ 3	0	
+ 6	0	— 1	+ 2	0	+ 2	0	—
+ 6	0	0	+ 1	0	+ 1	0	+
+ 6	+ 2	— 9	—	—	0	0	
+ 7	0	— 8	—	—	0	0	
+ 8	0	— 9	—	—	0	0	
+ 8	0	— 8	—	—	0	0	

MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DE PERTURBATION

TABLEAU XIII.

[Comparaison des séries M_0 et M_1 , ainsi que M_2]Unités : 10^{-4} rad.

Coefficient de			M_0		M_1		C
D.	F.	l .	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
0	0	0	+ 17 797	0	—	—	—
0	0	+ 1	+ 1	+ 416	0	+ 379	—
0	0	+ 2	+ 3	+ 6	— 2	+ 26	—
0	0	+ 3	0	— 39	— 1	— 43	—
0	0	+ 4	0	— 24	0	— 26	—
0	0	+ 5	0	— 15	0	— 14	—
0	0	+ 6	+ 1	— 8	+ 1	— 6	—
0	+ 2	— 6	0	+ 5	0	+ 6	—
0	+ 2	— 5	— 1	+ 6	+ 1	+ 10	—
0	+ 2	— 4	+ 5	+ 1	— 1	— 11	—
0	+ 2	— 3	— 4	— 17	+ 2	+ 1	—
0	+ 2	— 2	— 50	— 1 948	+ 63	— 1 544	—
0	+ 2	— 1	+ 5	+ 313	— 2	+ 301	—
0	+ 2	0	0	— 14	0	— 13	—
0	+ 2	+ 1	0	— 24	0	— 19	—
0	+ 4	— 6	+ 11	+ 22	— 2	0	—
0	+ 4	— 5	— 8	— 35	+ 5	— 14	—
0	+ 4	— 4	— 17	— 188	+ 14	— 283	—
0	+ 4	— 3	+ 1	+ 30	0	+ 29	—
0	+ 4	— 2	— 3	+ 9	0	— 2	—
0	+ 4	— 1	+ 1	— 7	0	— 4	—
0	+ 6	— 6	— 4	— 31	— 2	— 63	—
0	+ 6	— 5	+ 6	— 6	+ 1	+ 8	—
0	+ 6	— 4	— 8	+ 14	0	— 2	—
+ 1	— 4	+ 2	— 20	— 4	0	0	—
+ 1	— 4	+ 3	— 44	— 4	+ 43	— 18	—
+ 1	— 4	+ 4	— 10	— 4	+ 3	+ 1	—
+ 1	— 2	— 1	— 16	+ 4	— 3	— 2	—
+ 1	— 2	0	+ 34	— 2	+ 20	+ 1	—
+ 1	— 2	+ 1	+ 26	— 55	— 4	— 56	—

TABLEAU XIII (suite).

M ₁ .		ω ₀ .		ω ₁ .		Remarques.
Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 6	+ 5	— 20	0	— 5	— 2	0,9 *
— 3	— 5	+ 19	+ 5	+ 2	+ 5	1,8 *
+ 2	— 1	— 11	— 10	— 10	— 5	1,5
+ 39	+ 13	— 47	— 17	— 29	— 12	0,7
+ 226	— 32	— 232	+ 32	— 259	+ 15	0,15
— 45	+ 13	+ 24	— 12	+ 36	— 15	1,0
0	— 4	+ 18	+ 9	+ 11	+ 4	1,8
+ 3	+ 4	+ 37	— 2	— 2	— 4	1,5 *
+ 3	— 7	— 31	— 5	— 8	+ 4	0,7 *
+ 30	— 7	— 50	+ 7	— 5	+ 17	0,2 *
— 29	— 2	+ 2	— 3	+ 3	— 4	1,0 *
1	— 5	+ 13	+ 1	+ 10	0	1,9 *
5	0	— 96	— 5	0	0	0,6 *
2	— 4	— 8	— 6	— 8	0	0,2 *
4	+ 4	—	—	+ 8	— 74	0,15 *
1	— 20	+ 5	— 18	+ 2	— 13	0,6 *
+ 3	— 52	+ 7	+ 225	— 12	+ 251	0,2 *
1	+ 10	— 1	— 32	0	— 24	1,1 *
1	— 9	— 5	+ 38	+ 2	+ 27	1,4
0	— 95	+ 7	— 20	+ 2	— 17	0,6
— 22	+ 237	+ 39	— 1 015	+ 30	— 973	0,25
+ 2	— 41	+ 1	— 45	+ 1	— 38	1,1
+ 1	+ 4	— 5	— 8	0	— 13	1,9
0	— 24	+ 1	+ 19	0	+ 19	2,8
0	— 12	+ 1	+ 13	0	+ 12	3,6
— 2	— 39	— 3	+ 28	+ 2	+ 44	1,4
+ 4	— 274	+ 5	+ 226	— 3	+ 208	0,6
+ 36	— 3 221	— 38	+ 2 491	— 30	+ 2 481	0,3
— 20	+ 1 602	+ 15	— 883	+ 12	— 876	1,1
+ 2	— 58	— 4	— 217	+ 1	— 224	2,0

MÉTHODE NUMÉRIQUE DE CALCUL DE PERTUR

TABLEAU XIII (suite).

Coefficient de			M ₀ .		M ₁ .		C
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
÷ 2	0	+ 1	— 1	— 102	+ 1	— 103	+
÷ 2	0	+ 2	+ 1	— 45	+ 1	— 49	—
÷ 2	0	+ 3	0	— 20	0	— 21	+
÷ 2	+ 2	— 6	+ 2	+ 2	— 1	— 8	—
÷ 2	+ 2	— 5	— 3	— 43	+ 8	— 39	+
÷ 2	+ 2	— 4	— 5	— 428	+ 1	— 456	+
÷ 2	+ 2	— 3	+ 1	+ 259	0	+ 251	—
÷ 2	+ 2	— 1	0	— 15	0	— 11	—
÷ 2	+ 4	— 7	—	—	+ 10	— 31	—
÷ 2	+ 4	— 6	— 6	— 98	+ 7	— 114	+
÷ 2	+ 4	— 5	— 1	+ 64	+ 1	+ 64	—
÷ 2	+ 4	— 4	— 1	— 8	— 2	— 8	+
÷ 2	+ 6	— 8	—	—	— 4	— 24	—
÷ 2	+ 6	— 7	—	—	+ 2	+ 13	—
÷ 3	— 4	0	—	—	+ 5	— 1	—
÷ 3	— 4	+ 1	—	—	+ 2	— 5	—
÷ 3	— 2	— 3	— 11	+ 7	+ 3	+ 1	—
÷ 3	— 2	— 2	+ 28	0	+ 10	+ 12	—
÷ 3	— 2	— 1	— 30	— 29	— 47	— 23	—
÷ 3	— 2	0	+ 16	— 2	+ 11	+ 3	—
÷ 3	0	— 5	— 9	+ 4	+ 14	+ 5	—
÷ 3	0	— 4	+ 73	+ 25	+ 60	+ 44	—
÷ 3	0	— 3	+ 287	+ 157	+ 306	+ 168	—
÷ 3	0	— 2	— 170	— 90	— 186	— 90	—
÷ 3	0	— 1	+ 2	— 19	+ 8	— 17	—
÷ 3	0	0	+ 13	+ 7	+ 10	+ 4	—
÷ 3	+ 2	— 7	—	—	+ 9	+ 4	—
÷ 3	+ 2	— 6	+ 75	+ 7	— 5	0	—
÷ 3	+ 2	— 5	+ 55	+ 27	+ 44	+ 15	—
÷ 3	+ 2	— 4	— 33	— 17	— 36	— 12	—

TABLEAU XIII (suite).

M ₁ .		ω ₀ .		ω ₁ .		Remarques.
Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
— 26	+ 1	—	—	+ 19	— 1	0,3 *
— 10	— 3	—	—	+ 11	+ 4	0,5 *
+ 3	— 17	—	—	0	+ 11	0,3 *
+ 3	— 11	—	—	+ 1	— 35	0,5 *
0	+ 7	0	+ 17	0	0	0,3
+ 2	+ 90	— 4	— 80	— 4	— 81	0,5
0	— 31	0	+ 7	— 1	+ 19	1,4
+ 3	— 90	+ 3	+ 49	0	+ 60	0,3
— 11	— 290	+ 10	+ 267	+ 8	+ 276	0,6
+ 10	+ 194	+ 1	— 202	— 1	— 207	1,4
+ 3	— 31	— 9	+ 34	— 5	+ 34	2,3
— 1	— 1	+ 11	+ 27	— 1	+ 12	3,1
— 1	+ 8	+ 1	— 7	0	— 5	4,0
0	— 7	—	—	0	+ 7	1,1
+ 4	— 55	—	—	— 4	+ 36	0,2
— 1	— 118	+ 2	+ 105	+ 2	+ 110	0,6
+ 1	+ 108	0	— 104	0	— 105	1,5
0	— 26	— 1	+ 26	— 1	+ 26	2,3
+ 9	— 46	—	—	— 7	+ 40	0,2 *
+ 1	— 39	—	—	0	+ 37	0,7 *
+ 1	+ 35	—	—	— 1	— 34	1,5 *
— 1	+ 9	—	—	+ 1	+ 9	2,5 *
+ 1	+ 9	—	—	— 1	— 9	1,5 *
— 24	+ 1	—	—	+ 17	— 6	0,15 *
— 29	— 11	—	—	+ 26	+ 8	0,7 *
+ 10	+ 4	—	—	— 7	— 2	1,5 *
— 23	+ 28	—	—	+ 32	— 18	0,1
+ 52	+ 30	—	—	— 49	— 29	0,7
— 47	— 21	—	—	+ 47	+ 22	1,6
+ 8	0	—	—	— 9	— 1	2,4

TABLEAU XIII (suite et fin).

Coefficient de			M ₀ .		M ₁ .		ω ₀ .		ω ₁ .		Remarques.
D.	F.	L.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	Coefficient de cos.	Coefficient de sin.	
+ 5	+ 2	— 8	—	—	— 76	— 13	—	—	+ 63	+ 9	0,07 *
+ 5	+ 2	— 7	—	—	+ 18	+ 9	—	—	— 12	— 7	0,8 *
+ 5	+ 2	— 6	—	—	— 25	— 10	—	—	+ 24	+ 9	1,6 *
+ 6	— 4	— 3	—	—	+ 12	— 18	—	—	— 10	+ 25	0,06 *
+ 6	— 2	— 5	—	—	+ 41	+ 99	—	—	— 41	— 93	0,02
+ 6	— 2	— 4	—	—	+ 2	+ 22	—	—	— 12	— 23	0,8
+ 6	— 2	— 3	—	—	— 1	— 15	—	—	0	+ 16	1,7
+ 6	0	— 7	—	—	— 4	+ 409	—	—	— 8	— 179	0,02
+ 6	0	— 6	— 2	— 27	— 4	— 45	+ 1	+ 28	+ 4	+ 40	0,7
+ 6	0	— 5	+ 3	+ 43	+ 2	+ 45	— 4	— 44	— 2	— 44	1,7
+ 6	0	— 4	— 1	— 17	+ 1	— 15	+ 2	+ 16	— 1	+ 15	2,6
+ 6	+ 2	— 9	—	—	— 4	+ 70	—	—	+ 4	— 53	0,07
+ 6	+ 2	— 8	—	—	— 1	— 29	—	—	+ 2	+ 27	0,9
+ 6	+ 2	— 7	—	—	+ 2	+ 32	—	—	— 2	— 33	1,8
+ 6	+ 2	— 6	—	—	0	— 12	—	—	0	+ 12	2,6
+ 6	+ 4	— 9	—	—	+ 1	+ 14	—	—	— 1	+ 15	1,8 *
+ 7	— 2	— 6	—	—	+ 15	+ 2	—	—	— 12	— 2	0,13 *
+ 7	— 2	— 5	—	—	— 8	— 3	—	—	+ 7	+ 3	1,0 *
+ 7	0	— 8	—	—	+ 7	+ 1	—	—	— 12	— 4	0,2
+ 7	0	— 7	—	—	+ 8	+ 5	—	—	— 6	— 4	1,0
+ 7	0	— 6	—	—	— 11	— 5	—	—	+ 11	+ 5	1,9
+ 7	+ 2	— 8	—	—	— 9	— 4	—	—	+ 9	+ 4	1,9 *
+ 8	— 2	— 7	—	—	0	— 6	—	—	0	+ 7	0,3
+ 8	— 2	— 6	—	—	+ 1	+ 6	—	—	— 1	— 6	1,1
+ 8	0	— 9	—	—	+ 3	+ 17	—	—	— 3	+ 11	0,3
+ 8	0	— 8	—	—	— 1	— 10	—	—	0	+ 8	1,2
+ 8	0	— 7	—	—	+ 1	+ 9	—	—	— 1	— 9	2,0
+ 8	+ 2	— 9	—	—	+ 1	+ 8	—	—	— 1	— 9	2,0

CONCLUSION.

Nous avons présenté, dans ce Mémoire, une nouvelle méthode permettant d'obtenir une théorie analytique approchée d'un satellite. Elle consiste principalement en une analyse harmonique des résultats d'une intégration numérique du mouvement. Elle suppose un emploi intensif des machines à calculer électroniques à grande vitesse. Cette méthode a une valeur générale à condition d'adapter certains détails du calcul aux circonstances particulières du mouvement du corps considéré.

Nous avons, en particulier, développé une modification de la méthode lorsqu'il existe une quasi-commensurabilité entre les arguments principaux. D'autres modifications du même type permettraient d'adapter cette méthode au mouvement d'une petite planète ou d'un satellite artificiel, par exemple, dans la mesure où l'on sait que les éléments osculateurs restent développables en série de Fourier.

Nous avons appliqué cette méthode à l'étude du mouvement du VIII^e satellite de Jupiter dont on ne possède pas encore de théorie analytique satisfaisante.

Nous avons obtenu des séries représentant les observations de 40 années avec une erreur angulaire géocentrique inférieure à $4'$, alors que, dans la meilleure théorie analytique existante, les écarts atteignent $15'$ pour le même intervalle. Nous avons aussi calculé une deuxième approximation en effectuant une itération dans la résolution des équations du mouvement, et nous avons montré que ce processus était convergent. Nous avons montré ainsi que les séries publiées ont tous les caractères d'une solution analytique plus complète que celle de Brown-Brouwer.

Un tel résultat, particulièrement satisfaisant puisqu'il s'applique à un corps dont la théorie est très complexe, met en évidence l'efficacité de la méthode et prouve sur exemple que les séries obtenues par ce moyen constituent une solution analytique approchée du problème du mouvement.

Ce travail ayant pour but l'exposé et l'illustration de notre méthode, nous n'avons considéré le VIII^e satellite de Jupiter que dans la mesure où cette méthode s'appliquait. En particulier, nous n'avons pas recherché une théorie définitive de ce satellite. Ce qui reste à faire représente encore un travail considérable, mais la méthode d'analyse que nous avons exposée ne sera plus utile. Aussi la construction d'une théorie analytique définitive sera-t-elle l'objet d'un travail ultérieur que nous comptons entreprendre et qui, nous l'espérons, nous permettra de déterminer à nouveau la masse du système Jovien.

REMERCIEMENTS.

Je tiens à exprimer ici ma respectueuse reconnaissance à M. André Danjon, directeur de l'Observatoire de Paris, pour m'avoir donné la possibilité de faire un long séjour à l'Observatoire de Yale et pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à mon travail.

J'adresse mes remerciements respectueux à M. Dirk Brouwer, directeur de l'Observatoire de Yale, qui m'a suggéré d'entreprendre le travail dont je viens d'exposer les résultats et qui m'en a donné l'idée directrice. Je le remercie particulièrement de m'avoir réservé un accueil très cordial, de m'avoir associé à ses recherches et de m'avoir offert la possibilité matérielle d'effectuer ce travail.

J'ai pu effectuer les calculs sur l'I. B. M. 650 du Centre de Calcul de l'Université de Yale grâce au support financier accordé par l'« Office of Naval Research » que je remercie ici ainsi que le Centre de Calcul du Massachusetts Institute of Technology et l'Institut Blaise Pascal qui m'ont permis d'avoir accès à leurs machines électroniques.

J'adresse enfin mes affectueux remerciements à ma femme qui m'a soulagé de nombreux travaux matériels fastidieux.

Avant de remettre les épreuves corrigées, je tiens à rendre hommage à la qualité et à la célérité du travail de l'imprimerie Gauthier-Villars et remercier M. Brisse, secrétaire de la rédaction du Bulletin Astronomique pour son concours dans la présentation et la mise en page de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] W. J. ECKERT, D. BROUWER et G. M. CLEMENCE, *Coordinates of the five outer planets* (*Astronomical papers of the American Ephemeris*, vol. XII, 1951).
- [2] W. J. ECKERT, *Improvement by numerical methods of Brown's expressions for the Coordinates of the Moon* (*Astron. J.*, t. 63, 1958, p. 415).
- [3] Ch. DELAUNAY, *Théorie du mouvement de la Lune* (*Mém. Acad. Sc.*, t. 28, 1860; t. 29, 1867).
- [4] E. STIEFEL, *Ermittlung von allgemeinen Störungen einer Planetenbewegung mit Hilfe der Ergebnisse einer speziellen Störungsrechnung* (*Arkiv Math.*, t. 5, 1954, p. 347).
- [5] J. KOVALEVSKY, *The problems of the Eighth satellite of Jupiter* (*Astron. J.*, t. 63, 1958, p. 452).
- [6] E. W. BROWN et D. BROUWER, *Theory of the Eighth satellite of Jupiter, Part II* (*Trans. Yale Obs.*, t. 6, 1938, p. 192).
- [7] G. W. HILL, *Integrals of planetary motion suitable for an indefinite length of time* (*Astron. J.*, t. 25, 1905, p. 1).
- [8] E. W. BROWN et C. A. SHOOK, *Planetary theory*, Cambridge University Press, 1933, p. 180.

- [9] G. M. CLEMENCE, *Theory of Mars (Astronomical papers of the American Ephemeris, vol. XI, 1949, p. 229).*
- [10] E. W. BROWN, *Theory of the Eighth satellite of Jupiter (Trans. Yale Obs., t. 6, 1930, p. 47).*
- [11] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1893, chap. XIII, tome II.
- [12] C. F. GAUSS, *Méthode des moindres carrés* (Traduction de J. BERTRAND), Édit. Mallet-Bachelier, Paris, 1855, p. 35.
- [13] F. TISSERAND, *Ann. Obs. de Paris*, t. 18, 1855, p. 18.
- [14] *Planetary coordinates for the years 1800-1940*, Londres, 1933.
- [15] A. DANJON, *Astronomie générale*, Éditions Sennac, Paris, 1952, p. 250.
- [16] P. MELOTTE, *Note on the newly discovered Eighth satellite of Jupiter (Monthly Notices of the R. A. S., t. 68, 1908, p. 456).*
- [17] A. C. D. CROMMELIN, *The motion of the Eighth satellite of Jupiter from 1910 to 1916 (Monthly Notices of the R. A. S., t. 71, 1911, p. 50).*
- [18] N. F. BOEVA, *Application de la méthode d'extrapolation au mouvement du VIII^e satellite de Jupiter (Bull. Inst. Astron. de Léninegrad, n° 32, 1933, p. 152; en russe).*
- [19] H. R. J. GROSCHE, *The orbit of the Eighth satellite of Jupiter (Astron. J., t. 53, 1948, p. 180).*
- [20] D. K. KOULIKOV, *Application des méthodes numériques de la Mécanique céleste au mouvement du VIII^e satellite de Jupiter (Bull. Inst. Astron. théor. d'U.R.S.S., t. 4, 1950, p. 311; en russe).*
- [21] J. TROUSSET, *Étude semi-analytique du mouvement du VIII^e satellite de Jupiter (Ann. Obs. de Bordeaux, t. 15, 1916, p. 35).*
- [22] V. F. PROSKOURINE, *Sur la possibilité de représenter le mouvement du VIII^e satellite de Jupiter par la théorie analytique de Brown (Bull. Inst. Astron. théor. d'U.R.S.S., t. 4, 1949, p. 169; en russe).*
- [23] V. F. PROSKOURINE, *Étude du mouvement du VIII^e satellite de Jupiter (Bull. Inst. Astron. théor. d'U. R. S. S., t. 4, 1950, p. 341; en russe).*
- [24] J. KOVALEVSKY, *Sur la détermination des orbites elliptiques par la méthode de Laplace (Bull. Astron., t. 21, 1957, p. 161).*
- [25] H. MINEUR, *Techniques de calcul numérique*, Édit. Ch. Béranger, Paris, 1952, p. 57.
- [26] D. BROUWER, *The accumulation of errors in numerical integration (Astron. J., t. 46, 1937, p. 149).*
- [27] F. R. MOULTON, *An introduction to Celestial Mechanics*, the Mac Millan Cy édit. New York, 1902, p. 284.
- [28] D. BROUWER, *The motion of the outer Planets (Monthly Notices of the R. A. S., t. 115, 1955, p. 221).*
- [29] P. HERGET et P. MUSEN, *The calculation of littoral expansions (Astron. J., t. 64, 1959, p. 11).*

(Manuscrit reçu le 24 juin 1959).

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Orbites périodiques des satellites artificiels.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 juillet 1959.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean SARRAILH

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

155883-59

Dépôt légal, imprimeur 1959, n° 1366.

Imprimé en France.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

155883-59

Dépôt légal, imprimeur 1959, n° 1366.

Imprimé en France.